Modèles de calcul - TP2
Machines de Turing et fonctions récursives primitives, bis

Alexis Ballier

27 Mars 2009

Lors du TP précédent nous avons commencé à interpréter les fonctions récursives primitives de base (S, Z, P) avec des machines de Turing, aujourd'hui nous allons nous concentrer sur les contructeurs (C et R), c'est à dire la partie 4 du TP 1.

Nous supposerons que vous avez fait la question 2 du TP 1, si ce n'est pas la cas, référez vous à la fiche précédente.

La classe des fonctions récursives primitives est close par les constructeurs suivants :

– $C(f, g_1, g_2, \dots, g_k) = h$ telle que $h(\overline{x}) = f(g_1(\overline{x}), \dots, g_k(\overline{x}))$.
– $R(f, g) = u$ telle que $u(0, \overline{x}) = f(\overline{x})$ et $u(n+1, \overline{x}) = g(n, u(n, \overline{x}), \overline{x})$.

Pour arriver à interpréter ces constructeurs, nous aurons besoin de conventions plutôt strictes : il faudra appeller récursivement notre interpréteur sur une partie plus petite de l'entrée.

1 Composition

Les entrées sur le 1^{er} ruban sont par exemple : $C(S, S)(0)$, et notre machine devra écrire 01 sur le ruban.

Pour y parvenir nous aurons besoin de faire des appels récursifs, c'est à dire lorsque l'on a $C(f, g_1, \dots, g_n)(\overline{x})$ calculer $a_1 = g_1(\overline{x}), \dots, a_n = g_n(\overline{x})$. Pour enfin calculer $f(a_1, \dots, a_n)$.

Nous adopterons la convention que les deux rubans sont délimités par le caractère # à gauche (vous aurez donc à l'écrire au début).

Pour coder la composition, supposons que l'on ait sur le premier ruban $\#C(f, g_1, \dots, g_n)(\overline{x})$; il faut ainsi commencer par écrire $\#f(\#$ sur le 2^{eme} ruban, écrire $\#g_1(\overline{x})$ à la fin du premier ruban, revenir juste à droite du dernier #, faire le calcul récursivement pour obtenir a_1, modifier le 2^{eme} ruban en $\#f(a_1, \#$ et recommencer jusqu'à g_n pour obtenir $\#f(a_1, \dots, a_n)$ que l'on recopiera sur le 1^{er} ruban pour recommencer le même calcul.

Pour se souvenir de quel g_i on était en train de traiter on pourra mettre un marqueur sur le 1^{er} ruban.

Question 1 *Écrivez une machine qui, sur une entrée du type* $\#C(f, g_1, \dots, g_n)(\overline{x})$ *écrit* $\#g_1(\overline{x})$ *à la fin du* 1^{er} *ruban et* $\#f(\#$ *sur le* 2^{eme}*. On fera attention aux* *cas où l'entrée est complexe, comme par exemple $C(C(S,S),C(S,S))(11)$. Puis faites en sorte qu'elle calcule $a_1 = g_1(\overline{x})$.*

Question 2 *Modifiez la machine précédente de sorte qu'elle ait sur le second ruban un mot du type $\#f(a_1\#$ et sur le premier $\#C(f, g_1\$g_2, \ldots, g_n)(\overline{x})$. Ensuite, faites en sorte qu'elle calcule $a_2 = g_2(\overline{x}), a_3,$ etc. et qu'elle remplace le premier ruban par $\#f(a_1, \ldots, a_n)$ avec un second ruban vide.*

Question 3 *Calculez la valeur de la fonction $C(P1, C(S,S), S)(1)$.*

2 Récursion primitive

Nous allons chercher à interpréter $R(f,g)(n,\overline{x})$.

Question 4 *Écrivez une machine de Turing qui, sur une entrée du type $R(f,g)(0,\overline{x})$ écrit $f(\overline{x})$ sur son premier ruban.*

Question 5 *Écrivez une machine de Turing qui, sur une entrée du type $R(f,g)(n+1,\overline{x})$ écrit sur son premier ruban $g(n,\$,\overline{x})\#R(f,g)(n,\overline{x})$ et calcule récursivement $a = R(f,g)(n,\overline{x})$. Ensuite, la machine doit remplacer le \$ dans le premier ruban par a, c'est à dire que le premier ruban doit ressembler à $g(n,a,\overline{x})$.*

Question 6 *Déterminez ce que font les fonctions :*
- $a = R(P1, C(S, P11))$
- $b = R(Z, C(a, P111, P11))$

Question 7 *Écrivez une fonction récursive primitive* puiss *telle que sur une entrée puiss(x,y) la machine écrive la valeur de x^y.*