Propriétés structurelles, combinatoires et logiques des pavages

Alexis Ballier

Résumé

Les pavages du plan discret expriment les conséquences de contraintes géométriques simples. Ils sont définis par les agencements de couleurs qu'il est possible de former localement. Les pavages forment ainsi des coloriages du plan discret respectant un ensemble fini de contraintes locales. Malgré la simplicité de cette définition, les objets obtenus peuvent être complexes : l'existence même de pavages sous un jeu de contraintes donné est indécidable.

Dans cette thèse nous nous intéressons à l'ensemble des pavages valides pour des contraintes données ; nous étudions la structure de cet ensemble tout autant que celle des pavages eux-mêmes. Nous prouvons que les ensembles de pavages ne peuvent avoir que trois types de cardinalité : finie, dénombrable ou la cardinalité du continu. En étudiant différentes façons de structurer un ensemble de pavages, nous caractérisons chacune des trois cardinalités possibles par la structure des pavages obtenus. Les plus simples sont les ensembles de pavages finis : nous prouvons que ce sont ceux qui ne contiennent que des pavages périodiques. Les ensembles de pavages dénombrables, grâce à leur cardinalité intermédiaire, ont de nombreuses propriétés : nous les utilisons pour en exhiber les pavages typiques. Enfin, nous caractérisons les façons d'obtenir un nombre indénombrable de pavages.

Par la suite, nous étendons cette étude au cas où les contraintes ne sont plus vérifiées partout : nous considérons des pavages où nous autorisons, en une faible proportion de points, à ne pas respecter les contraintes. Nous montrons que, en présence d'erreurs, certains types de contraintes n'autorisent que des objets proches de pavages sans erreur, exhibant ainsi une certaine forme de stabilité. En revanche, d'autres types de contraintes, pour lesquelles nous avons exhibé certains pavages ayant une structure particulière, peuvent faire apparaître des objets plus éloignés lorsque nous introduisons des erreurs.

Enfin, nous faisons un retour sur les aspects logiques des pavages, vus comme des modèles de théories logiques. En codant les contraintes de pavages par des formules du premier ordre nous obtenons des correspondances entre la structure des pavages et des propriétés de la théorie. Cette approche nous ouvre de nouveaux horizons : l'axiomatisation du plan discret repose sur une présentation du groupe qui le caractérise. Nous étudions donc les généralisations possibles de nos résultats structurels au cas des pavages sur des groupes de présentation finie.