



UNIVERSITE MONTPELLIER II  
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC



# Pavages d'une polycellule

Thomas FERNIQUE<sup>1</sup>

Mémoire de DEA

réalisé au LIRMM <sup>2</sup> sous la direction

d'Olivier BODINI<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>thomas.fernique@ens-lyon.fr

<sup>2</sup>Laboratoire d'Informatique, Robotique et Microélectronique de Montpellier

<sup>3</sup>bodini@lirmm.fr

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Contexte et motivations</b>	<b>2</b>
1.1 Pavage de polyominos . . . . .	2
1.2 Potentiels . . . . .	3
1.3 Polyominos avec trous . . . . .	4
1.4 Structure de l'ensemble des pavages . . . . .	5
<b>2 Pavages d'une polycellule</b>	<b>7</b>
2.1 Pavages et compteurs . . . . .	7
2.2 Construction effective d'un pavage . . . . .	10
2.3 Structure de l'ensemble des pavages . . . . .	13
2.4 Énumération et échantillonnage aléatoire . . . . .	20
<b>3 Applications</b>	<b>22</b>
3.1 Pavages par dominos . . . . .	22
3.2 Pavages par losanges . . . . .	24
3.3 Pavages par écailles . . . . .	26
3.4 Couplages parfaits d'un graphe planaire biparti . . . . .	26
<b>Conclusion</b>	<b>28</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>30</b>

# Introduction

Un problème de pavage auquel chacun a pu se confronter est celui du *puzzle* : étant donné un ensemble de pièces (appelées aussi *tuiles*), comment les assembler en respectant les *contraintes locales* imposées par l'imbrication des pièces (due à leur découpe) et la continuité des couleurs (deux pièces devant être de même couleur là où elles se touchent) ? Le respect de ces contraintes conduit à obtenir, à une échelle plus globale, l'image finale promise.

Sous l'aspect récréatif de cet exemple apparaît une question fondamentale de la théorie des pavages : comment des informations locales (ici l'assemblage des pièces) engendrent-elles un ordre global (l'image finale) ? Ce problème de *transfert d'information* a été à l'origine de la théorie moderne des pavages, laquelle s'est depuis développée dans de nombreuses directions. On peut notamment citer des liens forts avec la théorie de la preuve ([25]), la calculabilité ([2, 4]), la physique des quasicristaux ([14, 22]), la théorie des nombres ([17]), la théorie des groupes ([5, 16]) et aussi - ce qui nous intéressera plus spécifiquement dans ce mémoire - avec la mécanique statistique, la théorie des graphes et celle des ordres.

Les articles [23] et [24], s'intéressant tous deux - d'un côté algorithmique surtout - au problème du *pavage par dominos*, ont constitué le point de départ de ce stage. Ce problème est lié au modèle de *recouvrement par dimères*, utilisé en mécanique statistique pour l'étude du comportement de particules polarisées, cadre dans lequel tant les aspects algorithmiques (simulation numérique) que structurels (description physique) sont importants. Du point de vue structurel, les résultats connus ([18] notamment) ont le défaut de n'offrir aucune approche constructive. D'un point de vue plus algorithmique, les avancées sont récentes et les approches multiples ([3, 7, 8, 10, 11, 12, 23, 24]).

L'objectif de ce mémoire est de formuler les résultats précédents dans un cadre *général, unifié et auto-suffisant* (c'est-à-dire ne renvoyant pas à des résultats démontrés dans un autre cadre). Le souci de généralité a été - particulièrement pour les résultats s'appuyant sur les spécificités du problème étudié (géométrie des dominos dans le pavage par dominos par exemple) - une première source de difficultés. Le souci d'unité a, lui, requiert de distinguer ce qui était commun à plusieurs des articles cités (nombreux et apportant des notions et notations différentes même si parfois proches) de ce que chacun apportait de nouveau. Enfin, le souci d'auto-suffisance a conduit à refaire entièrement les preuves de certains résultats qu'il eut parfois été possible de simplement transposer.

Le cadre retenu est celui des pavages de *polycellules* - qui sont en fait une classe particulière de graphes - et fait appel à quelques notions de base de la théorie des graphes, de la théorie des ordres (structure de treillis notamment) et de probabilités (chaîne de Markov).

Ce mémoire est articulé en trois chapitres. Le premier présente le contexte du stage : notions de base du domaine, état des connaissances et questions soulevées. Le deuxième chapitre, constituant le cœur du travail réalisé, expose les résultats obtenus ou reformulés dans le cadre retenu. Enfin, le dernier chapitre illustre les résultats du chapitre précédent dans quelques cas particuliers plus simples. La conclusion fait soigneusement la part des apports novateurs de ce mémoire et de ce qui a été amélioré ou seulement reformulé.

# Chapitre 1

## Contexte et motivations

On présente ici le cadre dans lequel a été effectué ce stage : domaine de recherche considéré, état des connaissances ainsi que quelques questions qui ont motivé le travail exposé dans la suite de ce mémoire.

### 1.1 Pavage de polyominos

Un polyomino plan est une union finie de cases de  $\mathbb{Z}^2$ . Un *pavage* d'un polyomino est une partition en polyominos (des sous-polyominos donc). On impose généralement une contrainte sur les polyominos de la partition : qu'ils soient des copies (translatées) d'un ensemble choisi  $\mathcal{T}$  de polyominos, appelés *tuiles*. On parle alors de pavage par  $\mathcal{T}$  (figure 1.1).



FIG. 1.1 – Un polyomino avec un trou (à gauche) et un pavage par deux tuiles de ce polyomino (à droite).

Étant donné un ensemble  $\mathcal{T}$  de tuiles, plusieurs questions se posent (liste non exhaustive) :

- Peut-on décider si un polyomino donné est pavable par  $\mathcal{T}$  ?
- Si un polyomino est pavable par  $\mathcal{T}$ , comment construire - algorithmiquement - un pavage par  $\mathcal{T}$  ? Avec quelle complexité ?
- Existe-t-il plusieurs pavages par  $\mathcal{T}$  d'un polyomino donné ? Quel est leur nombre (formule explicite ou algorithme de comptage) ? Comment tous les construire et avec quelle complexité ?

Pour des polyominos finis, la pavabilité est décidable puisqu'on peut toujours essayer toutes les combinaisons possibles (en nombre fini). Le but est donc plutôt d'obtenir des algorithmes aussi efficaces que possibles et des propriétés descriptives intéressantes (sur l'ensemble des pavages par exemple).



FIG. 1.2 – Quelques tuiles simples (de gauche à droite) :  $h_3$ ,  $h_2$ ,  $v_2$  et un triomino en L.

Malheureusement le problème de la pavabilité d'un polyomino devient très vite NP-complet pour un jeu de tuiles non trivial. Notons  $h_n$  (resp.  $v_n$ ) le polyomino rectiligne horizontal (resp. vertical) constitué de  $n$  cases (figure 1.2). Ces deux tuiles sont très simples, et

[15] montre que l'on peut paver un polyomino avec  $h_p$  et  $v_q$  en temps linéaire pourvu qu'il ne soit pas troué. Mais si  $p > 2$  ou  $q > 2$ , le problème devient NP-complet si l'on autorise les trous, même avec seulement les tuiles  $h_3$  et  $v_2$  (voir [1]); le problème redevenant par contre polynômial si l'on rajoute  $v_3$  et  $h_2$ , c'est-à-dire si on permet les rotations, ceci pour un polyomino avec ou sans trou (voir [20, 21]).

En fait, quand les tuiles comportent plus de 3 cases, il devient souvent possible de coder (polynômialement) une instance de 3-SAT (plus exactement une variante "planaire" de 3-SAT) par un polyomino de telle sorte qu'un pavage de ce polyomino donne une solution à l'instance de départ : le problème est dans ce cas NP-complet.

Pour cette raison le problème plus simple du pavage d'un polyomino par  $h_2$  et  $v_2$  (appelés dominos) a été spécialement étudié. Notons qu'il découle facilement du fait que le problème du couplage parfait est polynômial que le pavage par dominos l'est aussi. Cependant, d'une part on peut espérer obtenir de meilleurs algorithmes dans ce cadre particulier, d'autre part ce lien laisse de nombreuses questions en suspens (notamment structurelles).

## 1.2 Potentiels

Utilisée à cette fin par Thurston dans [24], la notion de *potentiel* a depuis souvent été un facteur clé de l'obtention de nombre de résultats sur les pavages par dominos. Thurston présente notamment un algorithme qui décide en temps linéaire si un polyomino sans trou est pavable par dominos, et construit un pavage s'il en existe. On donne ici un aperçu informel de l'algorithme afin de se familiariser avec cette notion de potentiel.

Considérons un polyomino connexe sans trou. On peut colorier ses cases comme un damier. En voyant alors ce polyomino comme un graphe dont les arêtes seraient les bords des cases, on peut *orienter* ces arêtes de telle sorte que chacune ait sur sa gauche soit une case noire, soit rien (figure 1.3).



FIG. 1.3 – Coloration en damier d'un polyomino et graphe orienté associé.

Si l'on connaît un pavage du polyomino, on choisit de valuer à  $-3$  les arêtes partageant un domino et à  $1$  les autres. On définit alors une fonction de hauteur  $h$ , appelée *potentiel*, sur les sommets par :

- $h(v_0) = 0$  pour un sommet  $v_0$  arbitraire;
- $h(v') - h(v)$  est égal à la valuation de l'arête  $(v, v')$  reliant  $v$  à  $v'$ .

On vérifie facilement la cohérence de cette définition. Réciproquement, soit  $h$  une fonction de hauteur sur les sommets telle qu'en valuant une arête  $(v, v')$  par  $h(v') - h(v)$  on ait :

- toute arête est valuée à  $1$  si elle est sur le bord, à  $1$  ou  $-3$  sinon;
- il y a exactement une arête valuée à  $-3$  sur les quatre de chaque case.

Alors on en déduit un pavage : chaque arête valuée à  $-3$  partage en deux un domino. On a donc une bijection entre ces potentiels et les pavages (figure 1.4).

Les arêtes du bord du polyomino étant toujours valuées à  $1$ , on peut calculer les potentiels des sommets du bord sans connaître de pavage (le calcul est cohérent, contrairement au cas de la figure 1.7, si le polyomino admet un pavage). On montre alors qu'il existe un pavage tel que tout sommet de potentiel minimum soit sur le bord (car on peut se ramener à cette situation en effectuant plusieurs fois l'opération présentée figure 1.5). Ceci impose localement la valeur des arêtes (figure 1.6). On détermine totalement les potentiels, donc un pavage, en

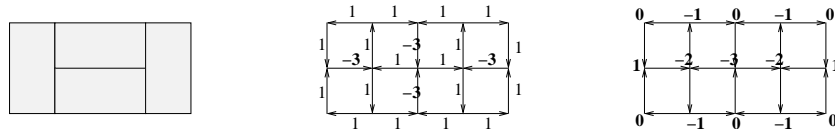


FIG. 1.4 – De gauche à droite : un pavage par domino ; la valuation des arêtes correspondante ; le potentiel correspondant (on a fixé à 0 le potentiel du sommet en haut à gauche).

itérant ce procédé.

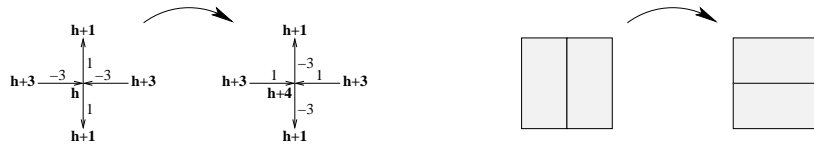


FIG. 1.5 – Un sommet de potentiel minimum qui n’est pas sur le bord voit deux arêtes valuées à  $-3$  arriver sur lui et deux à 1 en partant. On fait un *flip* en échangeant ces valuations : seul le potentiel du sommet est modifié (il augmente de 4, à gauche). À droite, l’action de ce flip sur le pavage associé.

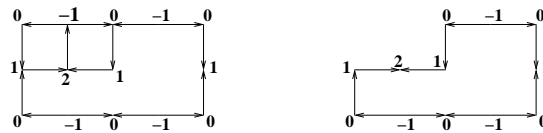


FIG. 1.6 – À gauche, le potentiel minimum sur le bord est  $-1$ . Dans un pavage où le potentiel atteint son minimum sur le bord, l’arête qui arrive sur ce sommet est forcément valuée à  $-3$  : les potentiels sont localement imposés, et on peut alors continuer avec le contour de droite.

### 1.3 Polyominos avec trous

L’algorithme du paragraphe précédent pave un polyomino à partir de son bord en montrant comment celui-ci impose le placement de certaines tuiles (c’est-à-dire détermine localement le potentiel). En quelque sorte, un pavage est intrinsèquement “codé” dans le bord du polyomino : il suffit de propager ce code vers l’intérieur pour déterminer tout le pavage. Que se passe-t-il dans le cas d’un polyomino avec trous ? La figure 1.7 montre que l’algorithme précédent n’est *a priori* plus applicable.

De façon très intuitive (voire romancée), le problème des trous est qu’ils “dissimulent” des informations que le bord aurait besoin de connaître pour coder un pavage : il devient difficile de raisonner aussi localement que dans le cas sans trou.

Dans [8, 11, 23] ont été proposés des algorithmes pour paver par dominos en présence de trous. La notion de potentiel reste centrale, mais est modifiée (de diverses façons) afin de “corriger” les biais des trous. Un algorithme en  $\mathcal{O}(kn)$ , où  $k$  est le nombre de trous et  $n$  le nombre de cases du polyomino, est notamment obtenu dans [23]. Cependant, bien que ces articles apportent chacun quelque chose à la compréhension du problème, ils restent assez différents et la multiplicité des notions et notations définies ne facilite pas une vision globale du problème. Peut-on proposer une présentation simple et unificatrice de ces résultats ?

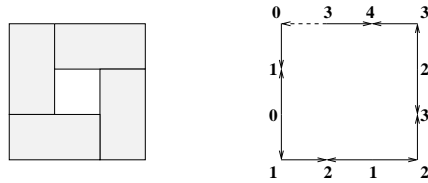


FIG. 1.7 – Un polyomino troué pavable (à gauche). Le calcul du potentiel des bords conduit pourtant à une incohérence (à droite, l’arête en pointillés ne peut être évaluée correctement).

### 1.4 Structure de l’ensemble des pavages

Un polyomino admettant un pavage en admet généralement plusieurs (figure 1.8). Comment les construire tous ? Comment passer de l’un à l’autre ? Combien sont-ils ?

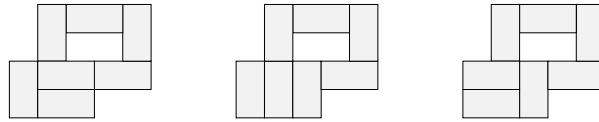


FIG. 1.8 – Pavages d’un polyomino. Sont-ils tous là ?

On a déjà vu paragraphe 1.2 une opération sur les pavages : le flip (figure 1.5). Cette opération permet par exemple de relier les trois pavages de la figure 1.8. Pourtant le pavage de la figure 1.9 ne peut être obtenu ainsi.

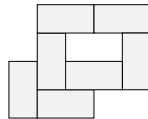


FIG. 1.9 – Un pavage oublié.

Dans [18], Propp décrit une opération (appelée *pushing down*) sur les couplages parfaits d’un graphe planaire biparti. Cette opération confère une structure de treillis distributif (voir [9] pour toute définition relative aux treillis et ordres) à l’ensemble de ces couplages parfaits, et permet notamment de passer de l’un à l’autre. Ce résultat s’applique dans le cadre des pavages par dominos, et on verra que l’opération en question généralise le flip classique.

Dans [10], cette structure de treillis est utilisée pour énumérer tous les pavages par dominos d’un polyomino sans trou, chaque pavage étant construit en temps linéaire. Dans [8], ce résultat est étendu aux polyominos avec trous, la complexité devenant quadratique.

Énumérer les pavages permet notamment de les compter. Cependant on verra que le nombre de pavages d’un polyomino peut être exponentiel en la taille du polyomino, aussi un tel décompte est peu efficace. Kasteleyn, dans [14], montre qu’on peut ramener le calcul du nombre de couplages parfaits d’un graphe planaire à un calcul de déterminant (polynômial en la taille du graphe). Ce résultat s’applique notamment aux pavages par dominos.

Enfin, plusieurs articles ([7, 11, 12]) se sont intéressé au fait que la géométrie particulière d’un polyomino peut se traduire par une contrainte commune à tous les pavages. Il se peut par exemple qu’un domino se retrouve à la même place dans tous les pavages. Inversement, deux cases peuvent être adjacentes sans qu’aucun pavage ne les couvre toutes deux par un seul domino (figure 1.10). Comme pour la construction d’un pavage d’un polyomino troué

(paragraphe 1.3), ces articles proposent définitions et notations qu'on souhaiterait unifier dans une présentation simplifiée.

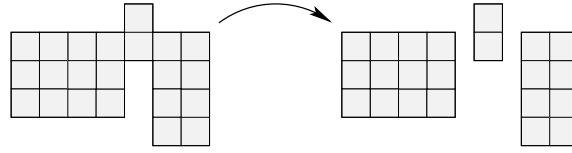


FIG. 1.10 – À gauche, l'ergot central impose le placement d'un domino. Tout pavage du polyomino se décompose alors naturellement en pavages de trois sous-polyominos (à droite).

Notons enfin que les résultats exposés dans [14] ou [18] ont un champ d'application plus vaste (graphes planaires bipartis). Peut-on exprimer les autres résultats (notamment constructifs) dans ce cadre plus général ?

# Chapitre 2

## Pavages d'une polycellule

Ce chapitre présente l'essentiel des résultats théoriques obtenus durant ce stage. Le souci de concision, de rigueur et de généralité a conduit à privilégier une présentation formelle relativement abstraite. Le lecteur est invité à lire en parallèle le chapitre 3 (page 22) qui donne des exemples simples (mais dans des cas particuliers, ce qui a motivé de ne pas les placer dans ce chapitre) illustrant les notions utilisées ici.

Le chapitre s'articule en quatre parties. On introduit d'abord la notion de pavage étudié et quelques concepts et propriétés fondamentaux (paragraphe 2.1). On s'intéresse ensuite au problème de pavabilité associé à la notion de pavage retenue : construction effective de pavage (paragraphe 2.2) et étude, descriptive et constructive, de l'ensemble des pavages possibles (paragraphe 2.3). On termine par exposer deux algorithmes - énumération et échantillonnage aléatoire de l'ensemble des pavages - reposant sur les résultats précédents (paragraphe 2.4).

### 2.1 Pavages et compteurs

#### 2.1.1 Polycellule

##### Définition 1 (Polycellule)

Soit  $G$  un graphe orienté. On définit la polycellule  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  par :

- un ensemble  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$  de cycles de  $G$  ;
- un sous-ensemble  $I$  des arêtes  $E$  de  $G$  appartenant à au moins un des cycles de  $\mathcal{C}$  ;
- un sommet particularisé  $v^*$ , quelconque, mais utilisé par au moins un cycle.

Les cycles de  $\mathcal{C}$  sont appelés cellules, les arêtes de  $I$  arêtes intérieures et celles de  $B = E \setminus I$  arêtes extérieures.

##### Définition 2 (Graphe d'une polycellule)

Le graphe d'une polycellule  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  est le graphe constitué par les sommets et arêtes des cycles de  $\mathcal{C}$ , auquel on adjoint, pour chaque arête orientée extérieure  $(v, v') \in B$ , l'arête orientée retour  $(v', v)$ .

##### Définition 3 (Pavage d'une polycellule)

Soit  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  une polycellule. Pour une arête  $a \in I$ , on note  $cell(a)$  le sous-ensemble des cellules de  $\mathcal{C}$  utilisant  $a$ . Un pavage de  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  est alors un sous-ensemble  $T$  de  $I$  tel que  $\{cell(a)\}_{a \in T}$  soit une partition de  $\mathcal{C}$ .

Notons que si la polycellule est connexe, alors  $G$  est fortement connexe (immédiat). La figure 2.1 illustre les trois définitions précédentes.

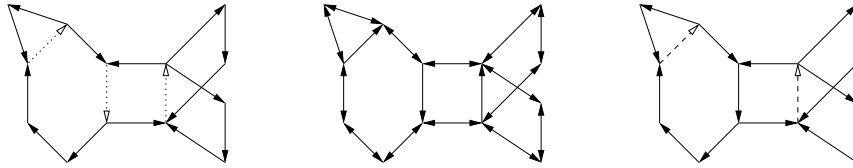


FIG. 2.1 – De gauche à droite : une polycellule (arêtes intérieures en pointillés) ; le graphe de cette polycellule ; un pavage (arêtes en pointillés).

### 2.1.2 Tensions et compteurs

#### Définition 4 (Tension)

Une tension  $T$  sur une polycellule  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  est une valuation réelle des arêtes des cellules de  $\mathcal{C}$  nulle sur les arêtes extérieures et valant toute cellule à 0.

#### Définition 5 (Compteur)

Un compteur  $\psi$  sur une polycellule  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  est une valuation réelle des arêtes des cellules de  $\mathcal{C}$  nulle sur les arêtes extérieures et valant toute cellule à 1.

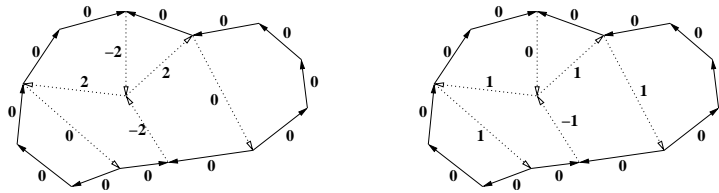


FIG. 2.2 – Tension (à gauche) et compteur (à droite) sur un polycellule constituée de 6 cellules (les cycles sans corde). Les arêtes intérieures sont en pointillés.

Les notions de tension et compteur s'étendent naturellement au graphe d'une polycellule en valant à 0 les arêtes retour supplémentaires (les autres gardant la même valuation).

Si la valuation identiquement nulle prouve trivialement l'existence d'une tension, il est moins évident de trouver un compteur. La proposition suivante assure l'existence d'un compteur dans le cas où la polycellule admet un pavage, et met par la même occasion en évidence le lien entre compteurs et pavages :

#### Proposition 1

*Pavages d'une polycellule et compteurs à valeurs dans  $\{0, 1\}$  sont en bijection.*

**Preuve.** Si une polycellule  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  admet un pavage  $T$ , considérons l'application  $\psi$  définie par :

$$\psi(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in T; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chaque cellule de  $\mathcal{C}$  a, par définition d'un pavage, exactement une arête intérieure dans  $T$ . Cette arête est évaluée à 1 par  $\psi$  et les autres à 0 :  $\psi$  value chaque cellule à 1 et est donc un compteur à valeurs dans  $\{0, 1\}$ .

Réciproquement, si  $\psi$  est un compteur à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , chaque cellule de  $\mathcal{C}$  a exactement une arête évaluée à 1 par  $\psi$  : l'ensemble des arêtes évaluées à 1 par  $\psi$  est donc un pavage de  $(\mathcal{C}, I, v^*)$ .  $\square$

Cette proposition conduit alors raffiner la définition 5 en distinguant la classe de compteurs suivante :

#### Définition 6 (Compteur binaire)

Un compteur binaire est un compteur à valeurs dans  $\{0, 1\}$ .

On identifiera dans la suite un compteur binaire et le pavage avec lequel il est en bijection par la proposition 1 : on parlera indifféremment de compteur binaire (ou compteur s'il n'y a pas d'ambiguïté) ou de pavage. On a les quelques propriétés simples suivantes sur les tensions et compteurs :

### Propriété 1

Sur une polycellule  $(\mathcal{C}, I, v^*)$ , l'ensemble des tensions forme un espace vectoriel réel dont l'ensemble des compteurs est un translaté (donc un espace affine).

**Preuve.** La somme de deux tensions est clairement une tension, et la différence de deux compteurs une tension.  $\square$

On a besoin d'introduire la définition suivante :

### Définition 7 (Polycellule contractile)

Une polycellule  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  est contractile si pour toute tension  $T$  et tout cycle  $c$ ,  $T(c) = 0$ .

### Propriété 2

Soit  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  une polycellule contractile et  $c$  un cycle du graphe de cette polycellule. Alors :

1. la valuation de  $c$  est la même par tous les compteurs ;
2. si de plus  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  admet un pavage, alors la valuation de  $c$  par un compteur est entière (positive).

**Preuve.**

1. Si  $\psi$  et  $\psi'$  sont deux compteurs, il est immédiat que  $\psi - \psi'$  est une tension. On a donc  $(\psi - \psi')(c) = 0$  c'est-à-dire  $\psi(c) = \psi'(c)$  d'où le résultat.
2. Soit  $\delta$  le compteur binaire associé à un pavage. Ce compteur étant à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , il est clair que  $\delta(c) \in \mathbb{N}$ . Le résultat demeure pour les autres compteurs par la propriété précédente.

$\square$

## 2.1.3 Potentiels

On fixe ici une polycellule  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  **contractile** et **admettant un pavage**. On note  $G$  son graphe.

### Définition 8 (Potentiel d'une tension)

Le potentiel d'une tension  $T$ , noté  $h_T$ , est la fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui, à un sommet  $v$  de  $G$ , associe le poids d'un plus court chemin pour  $T$  reliant  $v^*$  à  $v$  (c'est-à-dire un chemin de poids - valué par  $T$  - minimum parmi les chemins reliant  $v^*$  à  $v$ ).

### Définition 9 (Potentiel d'un compteur)

Le potentiel d'un compteur  $\psi$ , noté  $h_\psi$ , est la fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$  qui, à un sommet  $v$  de  $G$ , associe le poids d'un plus court chemin pour  $\psi$  de  $v^*$  à  $v$ .

Ces deux définitions sont bien cohérentes car la propriété 2 assure que ni tension ni compteur ne valent strictement négativement un cycle. Remarquons aussi qu'on montre facilement que tout cycle étant valué à 0 par une tension, la valuation d'un chemin (par une tension) ne dépend que de ses extrémités ; en particulier, tout chemin est un plus court chemin (pour les tensions).

### Propriété 3

Les compteurs ont les mêmes plus courts chemins.

**Preuve.** Soient  $\psi$  et  $\psi'$  deux compteurs. Soit  $c$  un plus court chemin pour  $\psi$  et  $c'$  un chemin de mêmes extrémités. On a :

$$\psi'(c') = \psi(c') + \psi'(c') - \psi(c') = \psi(c') + (\psi' - \psi)(c').$$

La tension  $\psi' - \psi$  valant identiquement  $c'$  et  $c$ , cette égalité se réécrit :

$$\psi'(c') = \psi(c') + (\psi' - \psi)(c) = (\psi(c') - \psi(c)) + \psi'(c).$$

$c$  étant un plus court chemin pour  $\psi$ ,  $\psi(c') - \psi(c) \geq 0$  et l'égalité précédente donne  $\psi'(c') \geq \psi'(c)$ . Si on choisit alors pour  $c'$  un plus court chemin pour  $\psi'$ , on a aussi  $\psi'(c') \leq \psi'(c)$ , d'où finalement  $\psi'(c') = \psi'(c)$  :  $c$  est aussi un plus court chemin pour  $\psi'$ . Symétriquement,  $c'$  est un plus court chemin pour  $\psi$ .  $\square$

On prouve alors le résultat fondamental suivant :

### Proposition 2

*Un compteur est entièrement déterminé par son potentiel.*

**Preuve.** Soient  $\psi$  et  $\psi'$  deux compteurs vérifiant  $h_\psi = h_{\psi'}$ .

Soit  $e = (v, v')$  une arête de  $I$ . Soit  $c$  un plus court chemin de  $v^*$  à  $v$  pour  $\psi$  :  $\psi(c) = h_\psi(v)$  et,  $\psi'$  ayant les mêmes plus courts chemins,  $\psi'(c) = h_{\psi'}(v)$ . Par hypothèse,  $h_\psi = h_{\psi'}$  d'où :  $(\psi - \psi')(c) = 0$ . Le même raisonnement donne un chemin  $c'$  de  $v^*$  à  $v'$  tel que  $(\psi - \psi')(c') = 0$ .

La tension  $\psi - \psi'$  value identiquement les chemins  $c'$  et  $c.e$  car ils relient tous les deux  $v^*$  à  $v$ . D'où :

$$\begin{aligned} (\psi - \psi')(c.e) &= (\psi - \psi')(c') \\ (\psi - \psi')(e) &= (\psi - \psi')(c') - (\psi - \psi')(c) \\ \psi(e) &= \psi'(e). \end{aligned}$$

Les deux compteurs valent donc identiquement les arêtes intérieures, et comme les arêtes extérieures sont toujours valuées à 0, on en déduit que  $\psi = \psi'$ .  $\square$

Ainsi un compteur définit un unique potentiel et, réciproquement, un potentiel définit un unique compteur.

## 2.2 Construction effective d'un pavage

### 2.2.1 Compteur d'une polycellule bipartite balancée

On montre ici comment construire un compteur (quelconque) sur une polycellule du type suivant :

#### Définition 10 (Polycellule bipartite balancée)

*Une polycellule  $(C, I, v^*)$  est dite bipartite s'il existe une partition  $(C_W, C_B)$  des cellules de  $C$  en deux ensembles tels que deux cellules partageant au moins une arête (on parlera de cellule voisines) ne soient pas dans le même ensemble. Elle est de plus balancée si  $C_W$  et  $C_B$  ont le même cardinal.*

*Les cellules de  $C_W$  sont appelées cellules blanches et celles de  $C_B$  cellules noires.*

#### Définition 11 (Graphe interne)

*Soit  $(C, I, v^*)$  une polycellule bipartite et  $(C_W, C_B)$  une bipartition de cette polycellule. Le graphe intérieur de cette polycellule, noté  $G_i$  est défini ainsi :*

- à chaque cellule de  $C$  est associé un sommet de  $G_i$  ;

– deux sommets de  $G_i$  sont reliés par une arête si et seulement si les deux cellules de  $\mathcal{C}$  associées sont voisines (c'est-à-dire partagent au moins une arête).  
 La bipartition de  $\mathcal{C}$  induit naturellement une bipartition  $(B, W)$  des sommets de  $G_i$ .

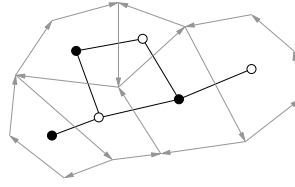


FIG. 2.3 – Une polycellule bipartite (en grisé) et son graphe interne (avec une bicoloration des sommets).

On va construire une valuation  $\psi$  sur  $G_i$ . Soit  $S$  un arbre couvrant de  $G_i$ . Une arête  $e$  (quelconque) de  $S$  partage  $S$  en deux sous-arbres. Considérons l'ensemble  $S_e$  des sommets de  $G_i$  du sous-arbre contenant le sommet **noir** de  $e$  (figure 2.4). On pose  $\psi(e) = |B \cap S_e| - |W \cap S_e|$  :  $\psi(e)$  compte le déficit noir-blanc des sommets de  $S_e$ . Ceci définit  $\psi$  sur les arêtes de  $S$ . Pour une arête  $e'$  de  $G_i$  qui n'est pas dans  $S$ , on pose  $\psi(e') = 0$ .

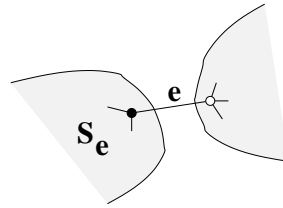


FIG. 2.4 – L'arête  $e$  partage un arbre couvrant  $S$  en deux sous-arbres.  $S_e$  est l'ensemble des sommets du sous-arbre contenant le sommet noir de  $e$ .

Cette construction est tirée de [23], lequel montre (dans un cadre un peu plus particulier, mais la preuve s'adapte très facilement) que pour tout sommet  $v$  de  $G_i$ , la somme des valuations par  $\psi$  des arêtes adjacentes à  $v$  vaut 1. On dérive alors aisément de  $\psi$  un compteur sur  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  : si une arête  $e$  relie deux sommets  $v$  et  $v'$  de  $G_i$ , les cellules de  $\mathcal{C}$  associées à  $v$  et  $v'$  partagent donc au moins une arête : on value à  $\psi(e)$  l'une de ces arêtes et à 0 les autres. La somme des valuations des arêtes d'une cellule vaut bien 1 (c'est la somme des valuations par  $\psi$  des arêtes de  $G_i$  adjacentes au sommet associé à cette cellule).

Comme la construction de  $G_i$ , d'un arbre couvrant  $S$  et de la valuation  $\psi$  se fait en temps linéaire (pour  $\psi$ , commencer à valuer le bas des branches de  $S$  puis remonter), on a le théorème suivant :

**Théorème 1**

*Si  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  est une polycellule bipartite équilibrée, on sait construire un compteur sur cette polycellule en temps linéaire (en le nombre de cellules).*

Cependant le lien entre pavages et compteurs se fait par les compteurs *binaires*. Aussi le paragraphe suivant montre comment construire un compteur binaire à partir d'un compteur quelconque.

**2.2.2 Compteur minimal**

On fixe ici une polycellule  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  **contractile**. Soit  $G$  son graphe. Si à chaque compteur correspond un unique potentiel, on ne dispose pas pour autant de caractérisation générale

des potentiels de compteurs binaires. La proposition suivante donne une réponse partielle à cette question :

**Proposition 3**

*Le compteur de potentiel identiquement nul est binaire.*

**Preuve.** Soit  $\delta$  le compteur de potentiel nul. Soit  $e = (v, v')$  une arête intérieure de  $G$ , montrons que  $\delta(e) \in \{0, 1\}$ .

S'il existe un plus court chemin de  $v^*$  à  $v'$  utilisant  $e$  comme dernière arête, alors  $h_\delta(v') = h_\delta(v) + \delta(e)$ , et  $h_\delta = 0$  assure  $\delta(e) = 0$ .

Sinon, c'est que  $h_\delta(v') < h_\delta(v) + \delta(e)$ , c'est-à-dire  $0 < \delta(e)$ . Considérons alors une cellule contenant  $e$  : ses arêtes ( $e$  exclue) forment un chemin orienté de  $v'$  à  $v$  de poids  $1 - \delta(e)$  (puisque  $\delta$  vaut 1 sur toute la cellule), d'où  $h_\delta(v) \leq h_\delta(v') + (1 - \delta(e))$  c'est-à-dire  $\delta(e) \leq 1$ . On a donc  $0 < \delta(e) \leq 1$ . Mais si  $c$  et  $c'$  sont deux plus courts chemins de  $v^*$  à respectivement  $v$  et  $v'$ , on déduit facilement de la propriété 2 que  $\delta(c) + \delta(e) - \delta(c')$  est entier ;  $\delta(e)$  est donc entier (car  $\delta(c) = h_\delta(v) = 0$  et  $\delta(c') = h_\delta(v') = 0$ ), et  $0 < \delta(e) \leq 1$  assure  $\delta(e) = 1$ .  $\square$

Comme les potentiels de compteurs binaires sont positifs, le potentiel nul est *minimal*, ce qui conduit à poser :

**Définition 12 (Compteur minimal)**

*On appelle compteur minimal, noté  $\delta_0$ , le compteur binaire de potentiel identiquement nul.*

*On appelle alors pavage minimal le pavage associé au compteur binaire minimal (figure 2.5).*

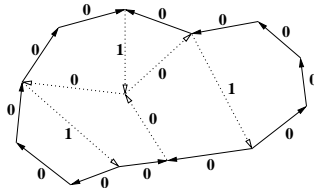


FIG. 2.5 – Le compteur minimal (ou pavage minimal) de cette polycellule : tout sommet est accessible par un chemin valué à 0 (à comparer avec la figure 2.2).

Construire ce pavage revient donc à construire un compteur de potentiel nul. La proposition suivante est alors très utile :

**Proposition 4**

*Soit  $\psi$  un compteur (quelconque). On définit l'application  $\delta$  sur une arête  $e = (v, v')$  par :*

$$\delta(e) = \psi(e) - (h_\psi(v') - h_\psi(v)).$$

*Alors  $\delta$  est le compteur de potentiel identiquement nul.*

**Preuve.** On vérifie aisément que l'application  $T : (v, v') \mapsto h_\psi(v') - h_\psi(v)$  est une tension (les termes s'éliminent en cascade quand on somme les valuations sur les arêtes d'une cellule). On en déduit que  $\delta$  est un compteur (structure d'espace affine). Par ailleurs, si  $c$  est un plus court chemin pour  $\delta$  de  $v^*$  à un sommet  $v$  on a :  $T(c) = h_\psi(v) - h_\psi(v^*)$  (les termes s'éliminent en cascade). Mais  $c$  étant aussi un plus court chemin pour  $\psi$ ,  $h_\psi(v) - h_\psi(v^*) = \psi(c)$ , et finalement  $h_\delta(v) = \delta(c) = 0$ .  $\square$

D'un point de vue algorithmique, le calcul du potentiel d'un compteur est un problème de plus courts chemins à origine unique (sur le graphe  $G$  avec  $v^*$  comme sommet origine). Sans hypothèse de positivité des valuations ou de structure particulière du graphe, les algorithmes connus pour ce problème sont de complexité quadratique ([6]). Cependant, dans le cas où  $G$  est planaire, [13] donne un algorithme en  $\mathcal{O}(n \ln(n)^3)$ . On en déduit le théorème suivant :

**Théorème 2**

Soit  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  une polycellule contractile admettant un pavage et  $\psi$  un compteur quelconque sur cette polycellule. Alors on sait construire le pavage minimal de  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  en temps  $\mathcal{O}(n^2)$  (où  $n$  est le nombre de cellules) en général, et en temps  $\mathcal{O}(n \ln(n)^3)$  dans le cas où le graphe de la polycellule est planaire.

En combinant avec le théorème 1 on obtient :

**Corollaire 1**

Soit  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  une polycellule contractile, bipartite, balancée et admettant un pavage. Alors on sait construire le pavage minimal de  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  en temps  $\mathcal{O}(n^2)$  (où  $n$  est le nombre de cellules) en général, et en temps  $\mathcal{O}(n \ln(n)^3)$  dans le cas où le graphe de la polycellule est planaire.

**2.3 Structure de l'ensemble des pavages**

On fixe dans toute cette partie une polycellule  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  **contractile** et **admettant un pavage**. Généralement (voir paragraphe 1.4), il existe alors plusieurs pavages. On a vu paragraphe 2.2 comment en construire un, et on cherche ici à savoir si on peut caractériser de manière intéressante l'ensemble de ces pavages.

**2.3.1 Un treillis distributif****Lemme 1**

Si  $\delta$  et  $\delta'$  sont deux compteurs binaires, alors les fonctions  $\max(h_\delta, h_{\delta'})$  et  $\min(h_\delta, h_{\delta'})$  sont des potentiels de compteurs binaires.

*Preuve.* Soit  $h = \max(h_\delta, h_{\delta'})$ . Soit  $\psi$  l'application définie, pour une arête  $e = (v, v') \in I$ , par :

$$\psi(e) = \delta_0(e) + (h(v') - h(v)).$$

On vérifie facilement que l'application  $(v, v') \mapsto h(v') - h(v)$  est une tension.  $\psi$  est donc bien un compteur.

Montrons que  $\psi$  ne prend que les valeurs 0 ou 1.  $\delta$  et  $\delta'$  sont à valeurs entières, donc  $h$  également, et  $\delta_0$  étant lui aussi à valeurs entières, c'est le cas pour  $\psi$ . Il suffit donc d'encadrer  $\psi$  entre 0 et 1.

Soit  $e = (v, v')$  une arête intérieure. La proposition 4 nous permet d'écrire  $\delta_0$  de deux façons :  $\delta_0(e) = \delta(e) + h_\delta(v) - h_\delta(v') = \delta'(e) + h_{\delta'}(v) - h_{\delta'}(v')$ . Une étude de cas donne alors :

$h(f)$	$h(f')$	$\psi(e)$
$h_{\delta(f)}$	$h_{\delta(f')}$	$\delta(e)$
$h_{\delta(f)}$	$h_{\delta'(f')}$	$\delta(e) \leq \psi(e) \leq \delta'(e)$
$h_{\delta'(f)}$	$h_{\delta(f')}$	$\delta'(e) \leq \psi(e) \leq \delta(e)$
$h_{\delta'(f)}$	$h_{\delta'(f')}$	$\delta'(e)$

Examinons les deux premiers cas, les deux derniers étant similaires.

– Si  $h(v) = h_\delta(v)$  et  $h(v') = h_\delta(v')$ , alors :

$$\begin{aligned} \psi(e) &= \delta_0(e) + h_\delta(v') - h_\delta(v) \\ &= (\delta(e) + h_\delta(v) - h_\delta(v')) + h_\delta(v') - h_\delta(v) \\ &= \delta(e). \end{aligned}$$

– Si  $h(v) = h_\delta(v)$  et  $h(v') = h_{\delta'}(v')$ , les deux écritures de  $\delta_0$  donnent :

$$\begin{aligned} \psi(e) &= \delta(e) + h_{\delta'}(v') - h_\delta(v') \\ \psi(e) &= \delta'(e) + h_{\delta'}(v) - h_\delta(v). \end{aligned}$$

Mais  $h(v') = h_{\delta'}(v')$  assure  $h_{\delta'}(v') \geq h_{\delta}(v')$  (car  $h = \max(h_{\delta}, h_{\delta'})$ ), et la première écriture de  $\psi(e)$  donne alors  $\psi(e) \geq \delta(e)$ . De même,  $h(v) = h_{\delta}(v)$  assure  $h_{\delta}(v) \geq h_{\delta'}(v)$ , d'où  $\psi(e) \leq \delta'(e)$  avec la seconde écriture de  $\psi(e)$ .

Les valeurs prises par  $\delta$  et  $\delta'$  assurent alors que  $\psi$  est bien encadré entre 0 et 1. C'est donc un compteur binaire puisqu'on sait déjà qu'il est à valeurs entières.

Il reste à vérifier que  $h$  est le potentiel de  $\psi$ . Soit  $c$  un plus court chemin pour  $\psi$  de  $v^*$  à un sommet  $v$  :  $h_{\psi}(v) = \psi(c) = \delta_0(c) + h(v) - h(v^*)$ . Comme  $c$  est aussi un plus court chemin pour  $\delta_0$  et que  $\delta_0$  a un potentiel nul par définition, on a :  $h_{\psi}(v) = h_{\delta_0}(v) + h(v) = h(v)$ . On a donc bien  $h_{\psi} = h$ .

Finalement,  $h = \max(h_{\delta}, h_{\delta'})$  est bien un potentiel de compteur binaire (c'est celui de  $\psi$ ). La preuve est similaire pour  $\min(h_{\delta}, h_{\delta'})$ .  $\square$

Ce lemme permet de définir les deux opérations suivantes sur les compteurs binaires :

**Définition 13 (Meet et Join de deux compteurs binaires)**

Soient  $\delta$  et  $\delta'$  deux compteurs binaires. Leur meet, noté  $\delta \wedge \delta'$ , est le compteur binaire de potentiel  $\max(h_{\delta}, h_{\delta'})$ . Leur join, noté  $\delta \vee \delta'$ , est le compteur binaire de potentiel  $\min(h_{\delta}, h_{\delta'})$ .

Une simple vérification des définitions (voir par exemple [9]) prouve alors le théorème suivant :

**Théorème 3**

*L'ensemble des compteurs binaires muni des opérations  $\vee$  et  $\wedge$  est un treillis distributif fini.*

On note  $\preceq$  l'ordre partiel associé à ce treillis :

$$\delta \preceq \delta' \iff (\forall v \ h_{\delta}(v) \leq h_{\delta'}(v)).$$

On a défini paragraphe 2.2.2 le compteur minimal, qui est le compteur binaire de potentiel minimal (nul en l'occurrence). Ici, l'ordre partiel  $\preceq$  définit aussi un "minimum", qui est ce même compteur minimal (immédiat avec les potentiels). On définit alors naturellement le compteur maximal comme le maximum pour l'ordre  $\preceq$  : c'est le compteur de potentiel maximal. La propriété suivante montre un lien fort entre compteurs minimal et maximal :

**Propriété 4**

*Soit  $(\mathcal{C}, I)$  une polycellule contractile admettant un pavage. Soit  $\delta$  et  $\delta'$  deux compteurs binaires tels que pour tout sommet  $v$  du graphe de la polycellule,  $h_{\delta}(v) \leq h_{\delta'}(v)$ . Si maintenant on remplace chaque arête  $e = (v, v')$  de  $(\mathcal{C}, I)$  par l'arête inverse  $e' = (v', v)$  et qu'on value  $e$  et  $e'$  de la même façon par les compteurs, alors :  $h_{\delta}(v) \geq h_{\delta'}(v)$ .*

**Preuve.** Il est facile de voir que  $(\mathcal{C}, I)$  est transformée par cette inversion d'arêtes en une polycellule contractile, donc  $\delta$  et  $\delta'$  sont encore deux compteurs binaires.

Soit  $v$  un sommet du graphe de  $(\mathcal{C}, I)$ . Soit  $c$  un plus court chemin de  $v^*$  à  $v$  pour les compteurs. Par hypothèse :  $\delta(c) \leq \delta'(c)$ . Inversons toutes les arêtes. Le chemin  $c$  est transformé en un chemin de  $v$  à  $v^*$ . Soit alors  $c'$  un (nouveau) plus court chemin de  $v^*$  à  $v$  pour les compteurs (inversion faite). La concaténation  $c'.c$  de ces deux chemins est un cycle (passant par  $v^*$  et  $v$ ). On sait alors que  $\delta(c'.c) = \delta'(c'.c)$ , et comme  $\delta(c) \leq \delta'(c)$ , ceci implique :  $\delta(c') \geq \delta'(c')$ , c'est-à-dire  $h_{\delta}(v) \geq h_{\delta'}(v)$ .  $\square$

On en déduit que le compteur binaire minimal d'une polycellule est le compteur binaire maximal de la polycellule obtenue en inversant les orientations de toutes les arêtes (et réciproquement). Tout algorithme de construction du pavage minimal permet donc très facilement de construire aussi le pavage maximal.

Notons qu'il n'y a en fait aucune difficulté à définir un ordre partiel *quelconque* sur un ensemble fini. Ici l'ordre défini (avec soin) a certes permis de caractériser compteurs minimal et maximal, mais son intérêt apparaîtra surtout paragraphe 2.3.3, après l'introduction de l'opération *flip* dans le paragraphe suivant.

### 2.3.2 Flips et nodules

#### Définition 14 (Nodule)

Un sous-ensemble  $A$  des sommets de  $G$  est un nodule si  $A$  est une composante fortement connexe (maximale pour l'inclusion) du graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant les arêtes valuées à 1 par un compteur binaire donné.

Cette notion est en fait indépendante du compteur donné :

#### Propriété 5

Les compteurs binaires ont tous les mêmes nodules

*Preuve.* Soient  $\delta$  et  $\delta'$  deux compteurs binaires. Soient  $A$  un nodule pour  $\delta$ ,  $u$  et  $v$  deux sommets de  $G$  : il existe deux chemins  $c$  et  $c'$ , valués à 0 par  $\delta$  et reliant respectivement  $u$  à  $v$  et  $v$  à  $u$ . Or  $\delta$  et  $\delta'$  valent identiquement le cycle  $c.c'$  donc  $\delta'(c.c') = \delta(c.c') = 0$ .  $c$  et  $c'$  relie donc  $u$  et  $v$  par des arêtes valuées à 0 par  $\delta'$  :  $A$  est inclus dans un nodule  $A'$  de  $\delta'$ . Symétriquement,  $A' \subset A$  :  $\delta$  et  $\delta'$  ont donc les mêmes nodules.  $\square$

Ainsi un nodule est propre à la polycellule. On peut le voir comme une sorte de *sommet étendu* : un ensemble de sommets partageant des propriétés communes. Par exemple, on peut d'ores et déjà remarquer que le potentiel d'un compteur  $\delta$  est constant sur un nodule  $A$  : on parlera du potentiel de  $A$ , noté  $h_\delta(A)$ . On note  $A^*$  le nodule contenant le sommet  $v^*$ .

D'un point de vue algorithmique, les nodules se déterminent - pourvu qu'on dispose d'un compteur binaire - en temps linéaire (c'est un calcul de composantes fortement connexes : voir [6] pour un algorithme linéaire).

#### Définition 15 (Flip)

Si toutes les arêtes arrivant <sup>1</sup> sur un nodule  $A \neq A^*$  sont valuées à 1 par  $\delta$  et toutes celles en partant à 0, on fait un flip descendant sur  $A$  en échangeant ces valeurs. Le flip ascendant est l'opération inverse.

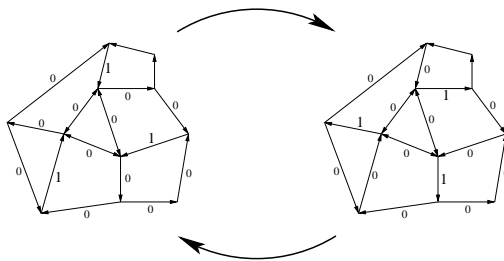


FIG. 2.6 – Le triangle central de cette polycellule est un nodule. Flip descendant sur ce nodule vers la droite, flip ascendant inverse dans l'autre sens.

Notons que si  $\delta(e) = 1$  pour toute arête  $e$  arrivant sur  $A$ , alors, nécessairement,  $\delta(e) = 0$  pour toute arête  $e$  partant de  $A$ . En effet, une arête  $e$  partant de  $A$  appartient à une cellule qui contient aussi une arête  $e'$  arrivant sur  $A$  : comme  $\delta(e') = 1$ ,  $\delta(e) = 0$  ( $\delta$  est un compteur binaire). Symétriquement, si  $\delta(e) = 1$  pour toute arête  $e$  partant de  $A$ , alors  $\delta(e) = 0$  pour toute arête  $e$  arrivant sur  $A$ . L'opération flip ainsi définie vérifie :

#### Propriété 6

1. Un flip transforme un compteur binaire en un compteur binaire ;
2. un flip ascendant (resp. descendant) sur un nodule  $A$  incrémente (resp. décrémente) de 1 son potentiel et laisse inchangés les autres potentiels.

<sup>1</sup>une arête  $(v, v')$  arrive sur  $A$  si  $v' \in A$  et  $v \notin A$  ; elle en part si  $v \in A$  et  $v' \notin A$ .

*Preuve.*

1. Tout cycle orienté intersectant un nodule  $A$  a autant d'arêtes arrivant sur  $A$  qu'en partant : l'échange des valuations laisse globalement inchangée la valuation du cycle. C'est en particulier vrai pour une cellule : chacune est encore évaluée à 1 après le flip.
2. Soit  $c$  un plus court chemin de  $v^*$  à un sommet  $v$  quelconque. Si  $v \notin A$ ,  $c$  comporte autant d'arêtes arrivant sur  $A$  et en partant : un flip ne change pas la valuation globale de  $c$ . Si  $v \in A$ ,  $c$  a exactement une arête qui arrive sur  $A$  de plus que le nombre d'arêtes qui en partent : l'échange des valuations des arêtes arrivant et partant de  $A$  incrémente donc de 1 la valuation de  $c$  dans le cas d'un flip ascendant, d'où le résultat sur le potentiel de  $A$ . Le cas d'un flip descendant est similaire.

□

L'intérêt de cette définition apparaît alors : le flip est une opération constructive simple à réaliser qui permet de passer d'un pavage à un autre et se comporte bien sur les potentiels. Le paragraphe suivant établit alors un lien fort entre le flip et la structure de treillis du paragraphe 2.3.1.

### 2.3.3 Accessibilité par flips

**Lemme 2**

Soient  $\delta$  et  $\delta'$  deux compteurs binaires tels que  $\delta \preceq \delta'$  et  $\delta \neq \delta'$ . Alors il existe un flip descendant qui transforme  $\delta'$  en un compteur  $\delta''$  vérifiant :  $\delta \preceq \delta'' \preceq \delta'$ .

*Preuve.* Considérons l'ensemble  $\{A \mid h_\delta(A) < h_{\delta'}(A)\}$ . Cet ensemble est non vide d'après les hypothèses. Soit  $A_0$  un nodule de cet ensemble de  $\delta'$ -potentiel maximal.

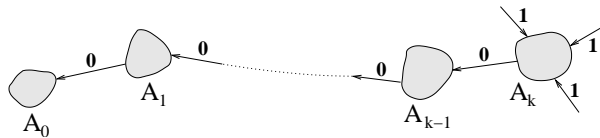


FIG. 2.7 – Partant de  $A_0$ , on cherche un nodule sur lequel faire un flip descendant.

S'il existe une arête  $e_0$  telle que  $\delta'(e_0) = 0$  arrivant sur  $A_0$ , on note  $A_1$  le nodule d'où part  $e_0$ . On a :  $h_{\delta'}(A_0) \leq h_{\delta'}(A_1) + \delta'(e_0) = h_{\delta'}(A_1)$ . En itérant autant que possible ce procédé, on extrait une suite  $A_0, A_1, \dots, A_k, \dots$  de nodule tels que  $h_{\delta'}(A_i) \leq h_{\delta'}(A_{i+1})$  et tels qu'une arête  $e_i$  évaluée à 0 relie  $A_{i+1}$  à  $A_i$ . Cette suite est sans répétition, car si  $A_i = A_j$  pour  $j > i$ , alors l'union des  $A_i, A_{i+1}, \dots, A_{j-1}$  serait un nodule (grâce aux arêtes  $e_i, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}$ , toutes évaluées à 0 par  $\delta'$ ) contenant strictement  $A_i$ , ce qu'exclut la définition d'un nodule (maximal pour l'inclusion). Le processus d'extraction est donc fini : soit  $A_k$  le dernier nodule obtenu. Toute arête arrivant sur  $A_k$  est alors évaluée à 1. (Figure 2.7). De plus  $A_k \neq A^*$  : en effet,  $0 \leq h_\delta(A_0) < h_{\delta'}(A_0)$  et par croissance de la suite  $(h_{\delta'}(A_i))_{i=1 \dots k}$ ,  $0 < h_{\delta'}(A_k)$ . On peut donc faire un flip descendant sur  $A_k$ . Soit  $\delta''$  le compteur obtenu.

On veut montrer  $\delta \preceq \delta''$ . Comme  $A_k$  est le seul nodule dont on a modifié le potentiel, il suffit en fait de montrer  $h_\delta(A_k) \leq h_{\delta''}(A_k)$ . Plus précisément,  $h_{\delta''}(A_k) = h_{\delta'}(A_k) - 1$  : il suffit donc de montrer  $h_\delta(A_k) < h_{\delta'}(A_k)$  (les potentiels de compteurs binaires sont entiers). On a déjà, par hypothèse,  $h_\delta(A_k) \leq h_{\delta'}(A_k)$ . On raisonne par l'absurde : supposons  $h_\delta(A_k) = h_{\delta'}(A_k)$  et tirons-en une contradiction.

On a :  $h_\delta(A_0) < h_{\delta'}(A_0) \leq h_{\delta'}(A_k) = h_\delta(A_k)$ . Montrons qu'il existe un indice  $i_0$ ,  $0 \leq i_0 \leq k$  tel que  $h_\delta(A_{i_0}) = h_{\delta'}(A_{i_0}) = h_{\delta'}(A_0)$ . Si  $h_{\delta'}(A_k) = h_{\delta'}(A_0)$ ,  $i_0 = k$  convient (Figure 2.8(a)).

Sinon, soit  $i_0$  le plus grand indice tel que  $h_{\delta'}(A_{i_0}) = h_{\delta'}(A_0)$ . On a donc  $h_{\delta'}(A_{i_0+1}) > h_{\delta'}(A_{i_0})$  (Figure 2.8(b)). Le choix de  $A_0$  assure pour tout nodule  $A$  :

$$(h_{\delta}(A) < h_{\delta'}(A)) \implies (h_{\delta'}(A) \leq h_{\delta'}(A_0)).$$

La contraposée de cette implication appliquée au nodule  $A_{i_0+1}$  donne :  $h_{\delta}(A_{i_0+1}) \geq h_{\delta'}(A_{i_0+1})$ . Il y a en fait égalité car  $\delta \preceq \delta'$  (figure 2.8(c)). Il suffit alors de remarquer que deux nodule reliés par une arête ont des potentiels (pour tout compteur binaire) qui diffèrent de 0 ou 1 ; appliqué au nodule  $A_{i_0}$  et  $A_{i_0+1}$  (reliés par l'arête  $e_{i_0}$ ), ceci assure  $h_{\delta}(A_{i_0}) = h_{\delta'}(A_{i_0})$  (figure 2.8(d)). L'indice  $i_0$  convient donc.

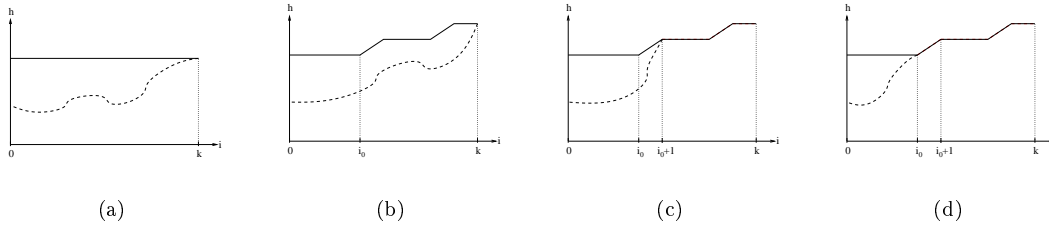


FIG. 2.8 – Existence de  $i_0$ . En abscisse, l'indice des nodule  $A_0, \dots, A_k$ . En ordonnée, les potentiels de ces nodule par  $\delta'$  (trait plein) et  $\delta$  (trait pointillé).

Soit  $c$  un plus court chemin (pour les compteurs) de  $v^*$  à  $A_{i_0}$ . Les arêtes  $e_0, \dots, e_{i_0-1}$  assurent l'existence d'un chemin  $c_{i_0}$  de  $A_{i_0}$  à  $A_0$  tel que  $\delta'(c_{i_0}) = 0$  (figure 2.9).

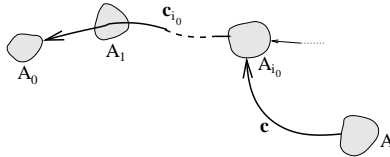


FIG. 2.9 – Le chemin  $c_{i_0}$  relie  $A_{i_0}$  à  $A_0$  et vérifie  $\delta'(c_{i_0}) = 0$ .

On a alors :  $\delta'(c.c_{i_0}) = \delta'(c) = h_{\delta'}(A_{i_0}) = h_{\delta'}(A_0)$ . On en déduit que  $c.c_{i_0}$  est un plus court chemin de  $v^*$  à  $A_0$ . Pour le compteur  $\delta$  cela signifie :  $h_{\delta}(A_0) = \delta(c.c_{i_0}) = \delta(c) + \delta(c_{i_0}) \geq \delta(c)$ . Mais  $c$  étant un plus court chemin de  $v^*$  à  $A_{i_0}$ ,  $\delta(c) = h_{\delta}(A_{i_0})$ . Et par choix de  $i_0$ ,  $h_{\delta}(A_{i_0}) = h_{\delta'}(A_0)$ . Comme  $h_{\delta'}(A_0) > h_{\delta}(A_0)$ , on déduit des inégalités précédentes  $h_{\delta}(A_0) > h_{\delta}(A_0)$ , ce qui donne la contradiction recherchée.  $\square$

Rappelons que pour un ordre partiel  $\preceq$  sur un ensemble  $X$ , on dit que  $x' \in X$  *couvre*  $x \in X$  si  $x \preceq x'$  et si  $\forall x'' \neq x', (x \preceq x'' \preceq x') \implies (x'' = x)$  (voir [9] par exemple). Du lemme précédent et de l'action d'un flip sur les potentiels, on déduit alors aisément le théorème suivant :

#### Théorème 4

Soient  $\delta$  et  $\delta'$  deux compteurs binaires.  $\delta'$  couvre  $\delta$  pour l'ordre partiel  $\preceq$  associé au treillis du paragraphe 2.3.1 si et seulement si il existe un flip descendant transformant  $\delta'$  en  $\delta$ .

#### Définition 16 (Graphe d'accessibilité par flips)

Soit  $(C, I, v^*)$  une polycellule contractile et  $\mathcal{T}$  l'ensemble (supposé non vide) de ses pavages. Le graphe d'accessibilité par flips de  $(C, I, v^*)$  est alors le graphe non orienté qui a les pavages de  $\mathcal{T}$  comme sommets et tel qu'une arête relie deux pavages si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par un flip.

Le théorème 4 nous dit alors que le graphe d'accessibilité par flips d'une polycellule est isomorphe au diagramme de Hasse<sup>2</sup> du treillis distributif du paragraphe 2.3.1. En particulier, ce graphe est donc connexe. On peut être plus précis, tant du point de vue constructif que descriptif. Notons d'abord que, bien que la preuve du lemme 2 ne soit pas immédiate, son application pratique est en fait simple :

**Proposition 5**

*Soient  $\delta$  et  $\delta'$  deux compteurs binaires. Si  $\delta \preceq \delta'$  et  $\delta \neq \delta'$ , alors on peut trouver en temps linéaire en la taille de la polycellule<sup>3</sup> un flip descendant qui transforme  $\delta'$  en un compteur  $\delta''$  vérifiant :  $\delta \preceq \delta'' \preceq \delta'$ .*

**Preuve.** Le lemme 2 assure l'existence d'un tel flip. Nécessairement, un tel flip se fait sur un nodule  $A$  tel que  $h_{\delta'}(A) > h_{\delta}(A)$  et tel que toute arête arrivant sur  $A$  soit valuée à 1 par  $\delta'$ . Il suffit donc de parcourir tous les nodules jusqu'à en trouver un satisfaisant à ces conditions (ce qui peut se faire en temps linéaire).  $\square$

On prouve alors le résultat fondamental suivant :

**Théorème 5**

*Soient  $\delta$  et  $\delta'$  deux compteurs binaires sur une polycellule et  $\mathcal{A}$  les nodules de cette polycellule. On pose :*

$$F(\delta, \delta') = \sum_{A \in \mathcal{A}} |h_{\delta}(A) - h_{\delta'}(A)|.$$

*Alors on sait transformer  $\delta$  en  $\delta'$  en effectuant  $F(\delta, \delta')$  flips successifs, chacun réalisable en temps linéaire. De plus on ne peut faire mieux en terme de nombre de flips.*

**Preuve.** En itérant la proposition 5, on trouve une suite de flips descendants transformant  $\delta$  en  $\delta \vee \delta'$ , chaque flip étant réalisable en temps linéaire. On obtient de même une suite de flips descendants transformant  $\delta'$  en  $\delta \vee \delta'$ , et la suite renversée des flips ascendants inverses transforme  $\delta \vee \delta'$  en  $\delta'$ . Mises bout à bout, ces deux suites donnent une séquence reliant les deux compteurs.

Enfin, comme un flip modifie de 1 le potentiel du nodule sur lequel il agit, d'une part on voit que la séquence a bien la longueur annoncée, d'autre part qu'on ne peut en fait faire plus court, puisqu'il faut égaliser les potentiels de  $\delta$  et  $\delta'$   $\square$

On peut vouloir une borne globale sur le nombre de flips reliant deux compteurs :

**Propriété 7**

*Tout compteur  $\delta$  est à moins de  $\frac{q(q-1)}{2}$  flips du compteur minimal  $\delta_0$  ( $q$  étant le nombre de nodules) et à moins de  $q(q-1)$  flips de tout autre compteur.*

**Preuve.** Soit  $A$  un nodule de potentiel maximal pour  $\delta$ . On pose  $k = h_{\delta}(A)$ . Soit  $c$  un chemin de  $A^*$  à  $A$  : le long de ce chemin, les potentiels des nodules traversés augmentent au plus de 1 à chaque fois. On a donc au moins  $k$  nodules de potentiels respectivement majorés par  $1, 2, \dots, k$ . Les potentiels des autres nodules sont, par définition de  $k$ , majorée par  $k$ . On majore donc la somme des potentiels de  $\delta$  par  $1 + 2 + \dots + k + (q - k)k \leq \frac{q(q-1)}{2}$ . Le résultat découle alors du théorème 5.  $\square$

### 2.3.4 Factorisation du treillis

On fixe une polycellule  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  contractile admettant un pavage. Soit  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_q\}$  l'ensemble de ses nodules. On montre ici qu'on peut parfois simplifier la structure de treillis précédente en utilisant le fait que certaines arêtes se retrouvent dans tous les pavages, ou au contraire dans aucun.

---

<sup>2</sup>voir [9] pour la définition de ce terme

<sup>3</sup>en supposant  $h_{\delta}$  et  $h_{\delta'}$  déjà connus

**Définition 17**

Une arête  $e$  est dite :

- interdite si  $\delta(e) = 0$  pour tous les compteurs binaires  $\delta$  ;
- forcée si  $\delta(e) = 1$  pour tous les compteurs binaires  $\delta$  ;
- utilisable sinon.

**Définition 18**

Deux cellules voisines d'une polycellule sont dites amies si elle partagent une arête non interdite. Cette relation est clairement symétrique, et on note  $\sim$  sa fermeture réflexive transitive<sup>4</sup>.

**Théorème 6**

Soit  $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  l'ensemble des classes d'équivalences de  $\mathcal{C}$  par  $\sim$ . Pour  $j = 1 \dots k$ ,  $I_j$  est l'ensemble des arêtes non interdites de  $C_j$  et  $v_j^*$  le premier sommet de  $C_j$  atteint par un chemin quelconque reliant  $v^*$  à  $C_j$ . On note  $\mathcal{T}$  l'ensemble des pavages de  $(\mathcal{C}, I, v^*)$ ,  $\mathcal{T}_j$  l'ensemble des pavages de  $(C_j, I_j, v_j^*)$  et on définit l'ordre partiel  $\preceq_j$  sur  $\mathcal{T}_j$  comme on a défini  $\preceq$  sur  $\mathcal{T}$ . On a alors l'isomorphisme suivant :

$$(\mathcal{T}, \preceq) \simeq (\mathcal{T}_1, \preceq_1) \times (\mathcal{T}_2, \preceq_2) \times \dots \times (\mathcal{T}_k, \preceq_k).$$

**Preuve.** Comme un pavage n'utilise pas les arêtes interdites, il est aisé de vérifier qu'il se décompose en pavages des classes d'équivalence par  $\sim$ . Réciproquement, on obtient bien un pavage de  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  en réunissant toutes les arêtes de  $k$  pavages des  $(C_j, I_j, v_j^*)_{j=1 \dots k}$ .  $\square$

Examinons maintenant les choses d'un point de vue algorithmique.

**Propriété 8**

Seul le nodule  $A^*$  est de potentiel nul dans tous les pavages.

**Preuve.** Soit  $\delta$  le compteur maximal et  $A$  est un nodule tel que  $h_\delta(A) = 0$ . De la propriété 4 et du fait que dans le pavage minimal tout nodule est accessible depuis  $A^*$  par un chemin d'arêtes toutes valuées à 0, on déduit : il existe un chemin  $c$  reliant  $A$  à  $A^*$  et tel que  $\delta(c) = 0$ . Par ailleurs, comme  $h_\delta(A) = 0$ , il existe aussi un chemin  $c'$  reliant  $A^*$  à  $A$  et tel que  $\delta(c') = 0$ . La définition d'un nodule assure alors que  $A = A^*$ .  $\square$

**Propriété 9**

Une arête est utilisable si et seulement si elle relie deux nodules distincts.

**Preuve.** Par définition, un flip ne peut modifier la valuation d'une arête ayant ses deux extrémités dans un même nodule. La connexité par flips de l'ensemble des compteurs binaire (théorème 5) assure alors qu'une telle arête à une valuation constante : elle donc est soit forcée soit interdite.

Réciproquement, soit  $e$  une arête, forcée ou interdite, reliant deux nodules  $A$  et  $A'$ . Un flip sur  $A$  ou  $A'$  est alors impossible (il changerait la valuation de  $e$ ).  $A$  et  $A'$  ont donc le même potentiel par tous les compteurs binaires (d'après la connexité par flips). Ce potentiel étant 0 pour le compteur minimal, la propriété 8 prouve  $A = A' = A^*$ .  $\square$

**Proposition 6**

Connaissant un compteur binaire  $\delta$  quelconque sur  $(\mathcal{C}, I, v^*)$ , on peut déterminer en temps linéaire la nature (forcée, interdite ou utilisable) des arêtes de  $(\mathcal{C}, I, v^*)$ .

**Preuve.** Les nodules sont déterminables en temps linéaire (déjà vu). D'après la propriété 9, une arête ayant ses deux extrémités dans un même nodule est forcée ou interdite selon sa valuation par  $\delta$ , les arêtes restantes étant utilisables.  $\square$

Cette proposition assure donc qu'on peut effectivement décomposer l'ensemble des pavages suivant le théorème 6.

<sup>4</sup>étant connu qu'un ami d'un ami est un ami

## 2.4 Énumération et échantillonnage aléatoire

Soit  $(\mathcal{C}, I, v^*)$  contractile admettant un pavage. Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble de ses nodules qu'on numérote arbitrairement :  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_q\}$ .

### Définition 19

On définit la relation  $<$  sur les compteurs binaires d'une polycellule par :

$$\delta < \delta' \iff \exists i \text{ tel que } \begin{cases} h_\delta(A_j) = h_{\delta'}(A_j) & \text{pour } j \leq i ; \\ h_\delta(A_i) < h_{\delta'}(A_i) \end{cases}$$

Il est clair que  $<$  est un ordre total. On note  $\leq$  sa fermeture reflexive qui est en fait une *extension linéaire* de  $\preceq$  (car si  $\delta \preceq \delta'$ , alors  $\delta \leq \delta'$ ). On appelle alors *successeur* d'un compteur  $\delta$ , noté  $s(\delta)$  le plus petit compteur supérieur à  $\delta$  (si  $\delta$  n'est pas le plus grand).

### Proposition 7 (Calcul du successeur)

Un flip ascendant et - éventuellement -  $(1 + \sum_{A \in \mathcal{A}} h_{s(\delta)}(A) - h_\delta(A))$  flips descendants permettent de calculer le successeur  $s(\delta)$  d'un compteur  $\delta$ . Tous ces flips sont réalisables en temps linéaire.

**Preuve.** Soit  $\delta$  un compteur binaire non maximal. Soit  $i$  l'indice maximal tel qu'un flip ascendant soit possible sur le nodule  $A_i$ . On transforme  $\delta$  en  $\delta'$  comme suit :

- on fait un flip ascendant sur  $A_i$  ;
- tant qu'il existe un nodule  $A_j$  avec  $j > i$  sur lequel on peut faire un flip descendant, on fait ce flip.

Montrons que  $\delta'$  est bien le successeur de  $\delta$ . On a  $\delta < \delta'$ . Si  $\delta'$  n'est pas le successeur immédiat de  $\delta$ , alors il existe  $\delta''$  tel que  $\delta < \delta'' < \delta'$ . Montrons qu'on aboutit à une contradiction.

On a :

- pour  $j < i$  :  $h_\delta(A_j) = h_{\delta''}(A_j) = h_{\delta'}(A_j)$  ;
- $h_\delta(A_i) \leq h_{\delta''}(A_i) \leq h_{\delta'}(A_i) = h_\delta(A_i) + 1$ .

D'après le théorème 5, on peut transformer  $\delta$  en  $\delta \wedge \delta''$  par une suite de flips ascendants. Notamment, si  $h_\delta(A_i) = h_{\delta''}(A_i)$ , le premier flip ascendant de cette suite se fait forcément sur un nodule  $A_j$  avec  $j > i$  : ceci contredit la maximalité de  $i$ . c'est donc que  $h_\delta(A_i) < h_{\delta''}(A_i)$ , et par encadrement  $h_{\delta''}(A_i) = h_{\delta'}(A_i)$ .

Toujours d'après le théorème 5, on peut aussi transformer  $\delta'$  en  $\delta' \vee \delta''$  par une suite de flips descendants. Comme on sait maintenant que  $h_{\delta''}(A_j) = h_{\delta'}(A_j)$  pour  $j < i$  et  $j = i$ , le premier flip descendant de cette suite se fait forcément sur un nodule  $A_j$  avec  $j > i$  : ceci contredit le fait que, lors de la construction de  $\delta'$ , on a effectué **tous** les flips descendants possibles sur les nodules  $A_j$  pour  $j > i$ .  $\delta'$  est donc bien le successeur de  $\delta$ . Le nombre de flips et la linéarité découlent du théorème 5.  $\square$

### Proposition 8

Le calcul du successeur d'un compteur peut être construit en  $\mathcal{O}(n^2)$  flips dans le pire des cas et en moins de 2 flips en moyenne.

**Preuve.** La majoration dans le pire des cas découle de la proposition 7 en utilisant la borne de la propriété 7. Si maintenant on calcule les successeurs itérés du compteur minimal  $\delta_0$  par la proposition 7, on effectue au plus le nombre de flips suivants (t étant le nombre total de compteurs binaires) :

$$\sum_{i=1}^{t-1} \left( 1 + 1 + \sum_{A \in \mathcal{A}} h_{s^i(\delta)}(A) - h_{s^{i-1}(\delta)}(A) \right) = 2t - 2 - \underbrace{\left( \sum_{A \in \mathcal{A}} h_{s^{t-1}(\delta)}(A) - h_\delta(A) \right)}_{\geq 0} \leq 2t.$$

D'où la moyenne annoncée. □

Comme chacun de ces flips est réalisable en temps linéaire, on a :

### Corollaire 2

*Le calcul du successeur d'un compteur peut être construit par un algorithme en  $\mathcal{O}(n^3)$  dans le pire des cas et en  $\mathcal{O}(n)$  en moyenne (où  $n$  est la taille de la polycellule).*

On a donc un algorithme, efficace en moyenne, pour énumérer les pavages d'une polycellule. Le prédécesseur d'un compteur se calcule similairement (échanger flip ascendant et descendant dans la proposition 7) : on peut se déplacer facilement dans la chaîne des pavages ordonnés par  $\preceq$ .

On définit alors facilement une chaîne de Markov : partant d'un pavage initial quelconque, on calcule successeur ou prédécesseur (avec même probabilité) du pavage courant : le processus converge (à l'infini) vers une distribution uniforme. En pratique, on effectue un nombre d'itérations fini, et le biais dû au choix du pavage initial n'est pas nul.

Dans [19], Propp expose une méthode d'échantillonnage aléatoire uniforme sur treillis distributif qui converge presque certainement *en temps fini* (mais potentiellement grand). Le principe est de définir une chaîne de Markov *monotone*, c'est-à-dire telle que, en notant  $\mu(x)$  l'élément obtenu à partir de  $x$  et  $\preceq$  l'ordre partiel associé au treillis, on ait :

$$x \preceq y \implies \mu(x) \preceq \mu(y).$$

Le point central est alors le suivant : si  $x_{\perp}$  (resp.  $x^{\top}$ ) est l'élément minimal (resp. maximal) du treillis et si les évolutions (suivant la chaîne de Markov) parallèles de ces éléments conduisent à un même élément  $x_{\infty}$  (ou *coalescent* en  $x_{\infty}$ ) au bout de  $n_0$  étapes, alors, par monotonie :

$$x_{\perp} \preceq y \preceq x^{\top} \implies \mu^{n_0}(x_{\perp}) = \mu^{n_0}(y) = \mu^{n_0}(x^{\top}) = x_{\infty}.$$

Autrement dit, les histoires des éléments extrêmes "écrasent" celles de tous les autres éléments du treillis. L'état coalescent  $x_{\infty}$  est une sorte de "fin des temps" pour l'évolution de la chaîne de Markov, dont on n'a en fait simulé que les  $n_0$  dernières étapes (principe appelé *couplage arrière*). L'article montre qu'on peut ainsi simuler en temps fini (la coalescence ayant lieu en temps fini presque certainement) le comportement infini d'une chaîne de Markov, et permet donc d'obtenir un élément du treillis *sans biais*.

Dans le cas qui nous intéresse - l'échantillonnage des pavages d'une polycellule - on définit une chaîne de Markov comme suit. Pour un pavage  $\delta$  de la polycellule, on choisit un nodule (avec une loi uniforme) et une direction de flip (ascendant ou descendant, avec la même probabilité) :  $\mu(\delta)$  est alors obtenu en effectuant ce flip si c'est possible, sans rien faire sinon. Ceci définit bien une chaîne de Markov dont on vérifie la monotonie. On en déduit un procédé d'échantillonnage.

# Chapitre 3

## Applications

Ce chapitre propose quatre exemples pouvant être vus comme des pavages de polycellules bipartite contractile et de graphe planaire. On illustre ainsi les notions et principaux résultats du chapitre 2 :

- polycellule, compteur binaire, potentiel, nodule et flip (définitions 1, 6, 9, 14 et 15) ;
- construction en  $\mathcal{O}(n \ln(n)^3)$  des pavages minimal et maximal (corollaire 1 et proposition 4) ;
- structure de treillis et lien avec l'opération flip (théorèmes 3 et 4) ;
- accessibilité par flips dans l'ensemble des pavages (théorème 5) ;
- factorisation du treillis des pavages (théorème 6 et proposition 6) ;
- énumération des pavages en  $\mathcal{O}(n)$  en moyenne (proposition 8 et corollaire 2).

### 3.1 Pavages par dominos

On se place ici dans le cadre du pavage d'un polyomino par dominos exposé chapitre 1.

À un polyomino colorié comme un damier on associe la polycellule ainsi définie (figure 3.1) :

- à chaque case du polyomino correspond une cellule de 4 arêtes, orientées de telle sorte qu'une arête ait sur sa gauche soit une case noire, soit rien ;
- les arêtes intérieures sont les arêtes communes à 2 cellules ;
- on particularise un sommet  $v^*$  sur le bord du polyomino.

À un pavage par dominos d'un polyomino correspond alors bijectivement un pavage de cette polycellule : les arêtes du pavage sont celles qui coupent en deux un domino.

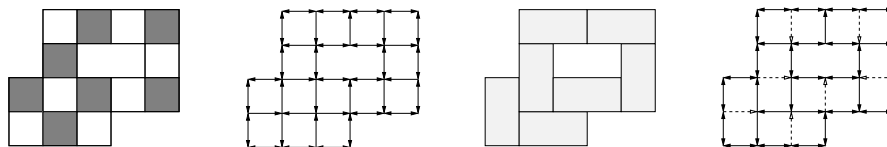


FIG. 3.1 – De gauche à droite : un polyomino (colorié en damier) ; le graphe de la polycellule associée (arêtes extérieures doublées) ; un pavage par dominos du polyomino ; le pavage correspondant de la polycellule (arête en pointillés).

Une telle polycellule est bipartite, son graphe est planaire et on montre par une récurrence sur les cellules qu'elle est contractile. Les résultats du chapitre 2 s'appliquent donc. Le paragraphe 2.2 nous permet de construire un compteur en temps  $\mathcal{O}(n)$  puis d'en déduire en temps  $\mathcal{O}(n \ln(n)^3)$  le compteur binaire minimal (figure 3.2).

Les figures 3.3 et 3.4 donnent un exemple un peu plus complexe engendrant un ensemble de pavages plus grand. Cet exemple montre notamment l'intérêt de la décomposition présentée paragraphe 2.3.4.

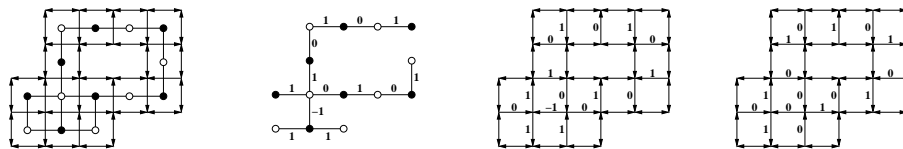


FIG. 3.2 – De gauche à droite : graphe intérieur (biparti) de la polycellule ; un arbre couvrant du graphe intérieur valué comme expliqué paragraphe 2.2.1 ; le compteur associé à cet arbre couvrant ; le compteur minimal (proposition 4).

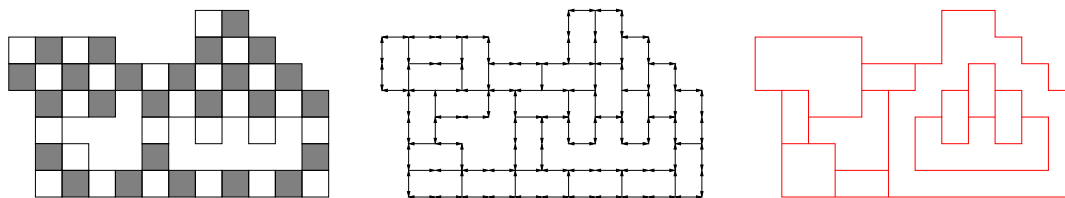


FIG. 3.3 – De gauche à droite : un polymino ; le graphe de la polycellule associée dans lequel on a enlevé les arêtes du compteur minimal ; les arêtes interdites, qui décomposent cette polycellule en 9 polycellules.

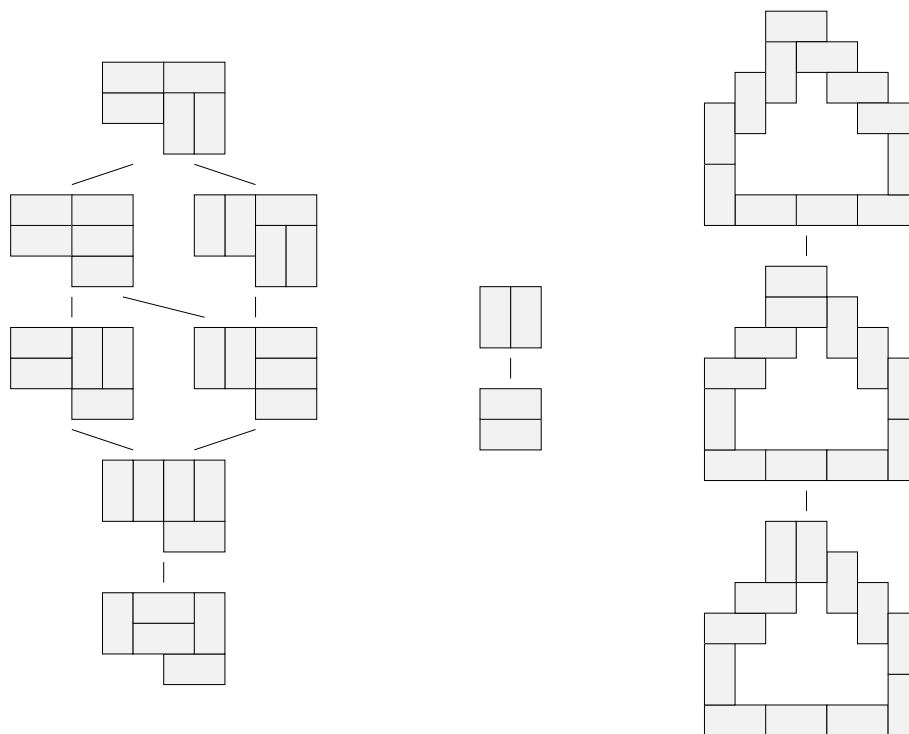


FIG. 3.4 – Factorisation du treillis par la décomposition précédente. Le treillis total des pavages a donc  $7 \times 2 \times 3 = 42$  éléments. Le flip entre les pavages du haut du treillis de droite généralise le flip classique.

### 3.2 Pavages par losanges

Comme un pavage par dominos revient à un couplage de cases d'une partie de la grille régulière  $\mathbb{Z}^2$  (c'est-à-dire un polyomino), un *pavage par losanges* revient à un couplage de cases d'une partie d'un réseau **triangulaire** du plan (qu'on appellera simplement *domaine triangulaire*). On construit la polycellule associée à un domaine triangulaire comme on l'a fait pour un polyomino, la seule différence étant que les cases sont maintenant triangulaires et non carrées (figure 3.5).

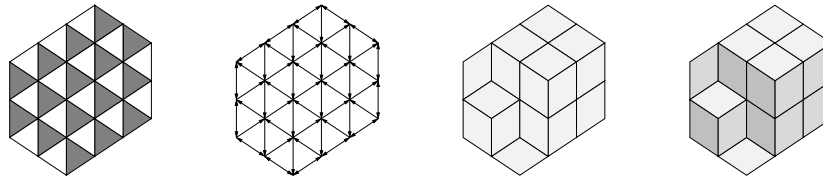


FIG. 3.5 – De gauche à droite : un domaine triangulaire (bicolorié) ; le graphe de la polycellule associée ; un pavage par losanges du domaine ; le même pavage avec une coloration des tuiles facilitant l'interprétation tridimensionnelle.

L'avantage du pavage par losanges est de donner une vision très intuitive du potentiel via une interprétation tridimensionnelle naturelle (les losanges étant les projections de faces de cubes de  $\mathbb{Z}^3$ ). La figure 3.6 montre la vision qu'on peut avoir d'un flip, et la figure 3.7 montre les étapes du calcul du successeur d'un pavage selon la méthode exposée paragraphe 2.4. Rappelons que le successeur d'un pavage s'obtient ainsi avec - en moyenne - moins de 2 flips.

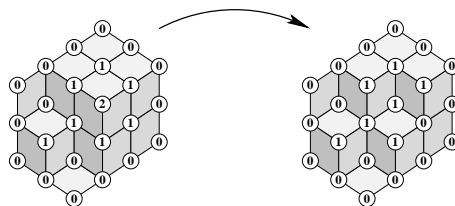


FIG. 3.6 – Un flip descendant (sur un nodule réduit à un sommet) s'interprète comme la suppression d'un cube (sur chaque nodule est indiqué son potentiel).

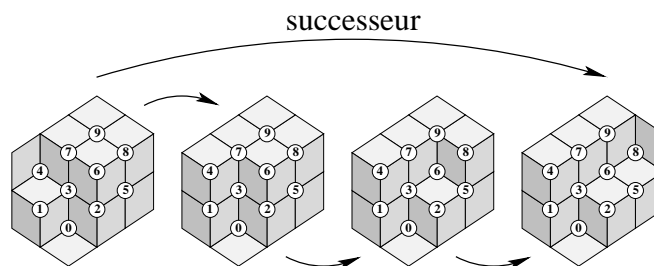


FIG. 3.7 – Calcul du successeur d'un pavage. Les nodules sont indexés comme indiqué. On effectue un flip ascendant sur le nodule 4 (plus grand indice tel que ce soit possible) puis tous les flips descendants possibles sur les nodules d'indice  $i > 4$ .

Cependant cette vision tridimensionnelle atteint aussi parfois ses limites : le domaine de la figure 3.8 conduit - visuellement - à une distorsion de l'espace, bien qu'il soit pavable et que tous les résultats précédents s'appliquent tout à fait normalement.

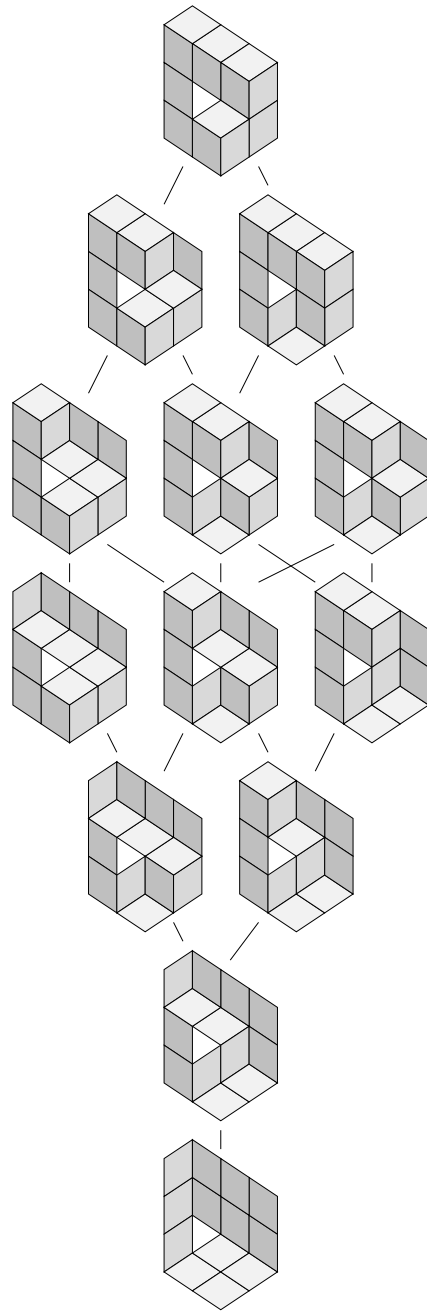


FIG. 3.8 – Treillis distributif des pavages d’un domaine (troué). Interprétés dans l’espace, les pavages sont “impossibles” (comme certains dessins d’Escher). Ce point de vue facilite malgré tout la perception des potentiels et la nature des flips (descendant ou ascendant).

### 3.3 Pavages par écailles

Après s'être intéressé aux domaines de réseaux à cases carrées ou triangulaire, déjà beaucoup étudiés dans la littérature, on considère ici un domaine "mixte", alliant cases hexagonales à cases triangulaire (figure 3.9). Ici encore on associe de la même façon une polycellule à un sous-domaine de ce domaine mixte (figure 3.10).

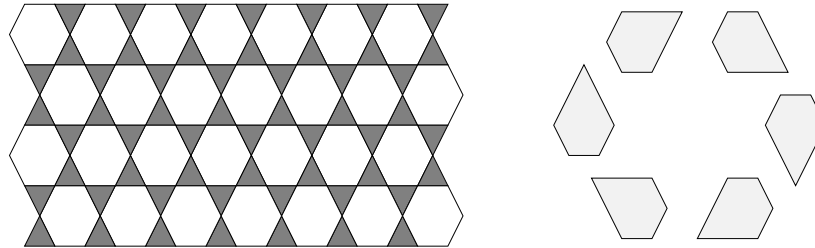


FIG. 3.9 – À gauche, domaine constitué de cases hexagonales et triangulaires. À droite, les tuiles (écailles) considérées.

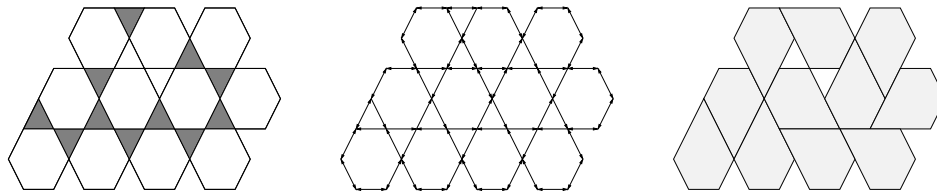


FIG. 3.10 – De gauche à droite : un sous-domaine du domaine précédent ; la polycellule associée ; un pavage par écailles

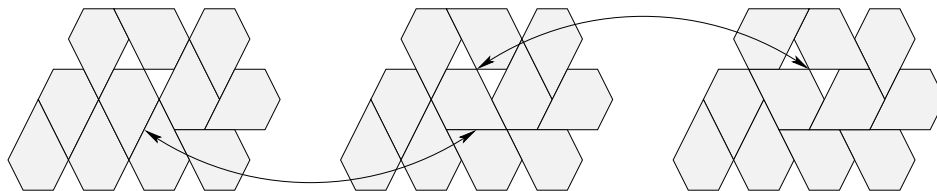


FIG. 3.11 – Exemples de flips sur pavages par écailles.

### 3.4 Couplages parfaits d'un graphe planaire biparti

Soit  $G$  un graphe planaire biparti. S'intéressant aux (éventuels) couplages parfaits de  $G$ , on peut sans restriction de généralité supposer que  $G$  n'a pas de sommet de degré 1 (car si le graphe admet un couplage parfait, un tel sommet sera toujours couplé avec son unique voisin : on peut retirer la paire de sommets, qu'on pourra toujours rajouter plus tard si l'on veut).

Fixons une représentation planaire de  $G$  et une coloration noir/blanc des sommets. Soit  $G^\perp$  le dual de  $G$  : à chaque sommet de  $G$  correspond une face de  $G^\perp$ , et la coloration des sommets induit naturellement une coloration des faces de  $G^\perp$ . On oriente alors les arêtes de  $G^\perp$  de telle sorte que les faces noires soient des cycles orientés dans le sens trigonométrique et les faces blanches dans le sens inverse (figure 3.12).

On associe une polycellule  $(\mathcal{C}, I)$  à  $G$  comme suit :

- les cellules  $\mathcal{C}$  sont les cycles orientés que constituent les faces de  $G^\perp$  ;
- les arêtes de  $I$  sont les arêtes de  $G^\perp$ .

On choisit généralement de particulariser le sommet associé à la face extérieure de  $G$  (sur la figure 3.12, c'est le sommet "éclaté"). Le graphe de cette polycellule est alors  $G^\perp$ , qui est planaire.  $G$  est son graphe intérieur. Cette polycellule est bipartite (comme  $G$ ) et contractile (induction sur le nombre de faces).

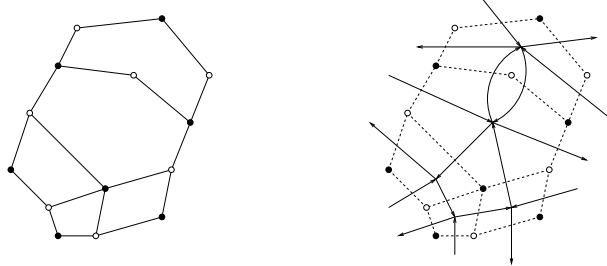


FIG. 3.12 – À gauche, représentation plane de  $G$ . À droite, polycellule associée ( $G$  est représenté en pointillés, et par souci de lisibilité le sommet  $(v^*)$  où se rejoignent toutes les arêtes pendantes a été "éclaté").

À tout pavage  $T$  de cette polycellule correspond alors bijectivement un couplage parfait de  $G$  : deux sommets de  $G$  sont couplés si et seulement si les cellules de  $\mathcal{C}$  associées partagent une arête de  $T$  (figure 3.13) : les résultats du chapitre 2 s'appliquent à l'ensemble des couplages parfaits d'un graphe planaire biparti.

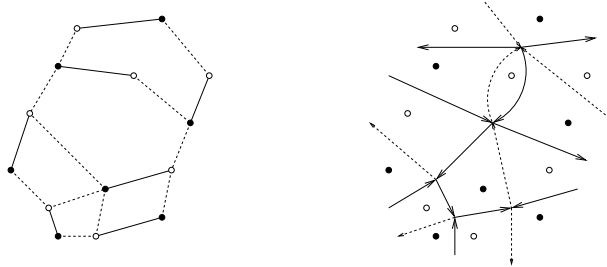


FIG. 3.13 – À gauche, un couplage parfait (arêtes du couplage surlignées). À droite, le pavage associé (arêtes du pavage en pointillés).

Cet exemple généralise en fait les précédents, et montre que les résultats du chapitre 2 sont applicables à tout problème de pavage par dimère de domaines plans troués constitués de cases de forme quelconque<sup>1</sup>. La figure 3.14 montre comment ramener le cas des dominos au cas de ce paragraphe.

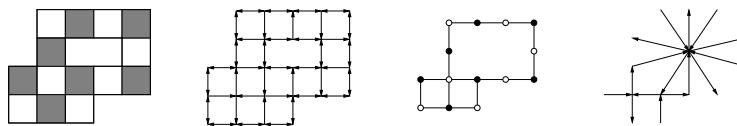


FIG. 3.14 – De gauche à droite : un polyomino ; le graphe de sa polycellule ; son graphe interne est un graphe planaire biparti ; la polycellule associée à ce graphe planaire (avec toujours un sommet "éclaté").

<sup>1</sup>connexes et bornées quand même...

# Conclusion

Ce mémoire a défini et exploré le problème du pavage de polycellules, en menant de front une approche *algorithmique* et une approche *structurelle*. Notamment, une structure, éventuellement simplifiée par factorisation, de treillis distributif a été donnée à l'ensemble des pavages d'une polycellule, tout en proposant les outils constructifs adaptée à exploiter algorithmiquement cette structure : calcul des pavages minimal et maximal, accessibilité entre deux pavages quelconques par une séquence de flips explicite, détermination des nodules et de la décomposition associée (via les arêtes interdites) . . .

Le chapitre 3 a montré que le problème du pavage de polycellules généralisait les problèmes étudiés dans les articles [3, 7, 8, 10, 11, 23, 24] (pavages par dominos ou losanges de domaines finis avec trous ; polycellules  $k$ -régulières). Enfin, les aspects structurels développés par Propp dans [18] sont aussi intégrés dans ce mémoire, bénéficiant en sus des apports algorithmiques déjà mentionnés.

Détaillons plus précisément le travail réalisé :

- Ce qui était **préexistant** : Les notions de flip et de nodule (appelées *twisting* et *accessibility class*) ainsi que la structure de treillis distributif et le lien avec le flip (théorèmes 3 et 4) se retrouvent (dans un cadre différent mais équivalent) dans [18]. Le concept d'arêtes interdites pour décomposer les pavages (terme *elementary component*) se trouve aussi dans [12], mais n'est pas relié à la structure de treillis précédente (théorème 6).
- Ce qui est **neuf** ou **amélioré** : La notion de compteur et les propriétés afférentes, qui permettent une présentation simple mais riche, a été introduite ici. Les aspects algorithmiques des théorèmes 1, 2 et 5 sont étendus ici au delà du simple cas du pavage par dominos ou losanges, et le mémoire introduit la factorisation du théorème 6. L'algorithme de calcul du successeur en temps moyen  $\mathcal{O}(n)$  (propositions 7 et 8) améliore un résultat équivalent de [8] de complexité  $\mathcal{O}(n^2)$ . Enfin, l'application du théorème 2 au calcul d'un couplage parfait d'un graphe biparti planaire (chapitre 3) par un algorithme de complexité  $\mathcal{O}(n \ln(n)^3)$  (en utilisant le résultat de [13]) semble améliorer la complexité générale en  $\mathcal{O}(n^{1.5})$  d'un algorithme de couplage<sup>2</sup>.

Terminons par quelques perspectives de prolongement de ces travaux.

Sans sortir du cadre défini ici, remarquons que les polycellules auxquelles s'applique le théorème 1 sont d'un type plus général que celles considérées pour la construction d'un pavage. On peut en fait construire un compteur (quelconque) sur une polycellule non contractile et n'admettant pas de pavage. Une interprétation possible d'un compteur dans ce cas là serait un pavage *réel*. Dans le cadre des dominos par exemple, on peut voir un tel pavage comme une combinaison linéaire de tuiles : une case peut être couplée par 2.5 dominos positifs avec une case et par 1.5 dominos négatifs avec une autre. . . L'idée serait alors de chercher si une telle vision - au delà de son aspect abstrait - ne permettrait pas le calcul de pavages *minimisant* les recouvrements (ou maximisant le nombre de cellules correctement couplées), et par

---

<sup>2</sup>Il n'a pas été trouvé de résultat ramenant le calcul d'un tel couplage à celui des distances à un sommet source.

ce moyen une approximation de pavage dans les cas où il n'en existe pas. Quels liens pourraient exister avec la théorie des *couplages maximaux* (en non plus parfaits) dans les graphes ?

Dans un autre ordre d'idée, il serait intéressant de savoir si les résultats précédents pourraient être utilisés ou adaptés au problème du pavage de polycubes (unions de cubes de  $\mathbb{Z}^3$ ) par des dicubes (figure 3.15). Les quelques tentatives effectuées durant le stage ont échoué : les polycellules définies n'étaient ni contractiles ni bipartites. Le lien entre le pavage par dominos (ou dimères) et le pavage par dicube ne semble donc pas si évident, et la littérature à ce sujet est encore presque inexistante. Notons que la construction d'un pavage peut toujours se déduire d'un couplage parfait de graphe (en temps polynômial donc) : les questions sont plus structurelles.

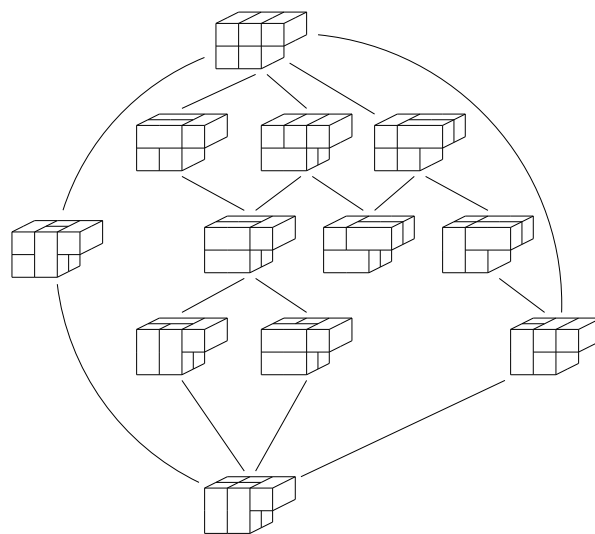


FIG. 3.15 – Pavages par dicubes d'une figure simple. Une arête relie deux pavages déduits l'un de l'autre par un équivalent naturel du flip plan. Le graphe résultant est-il connexe ? Quelle notion de flip généraliserait celle du plan ? Peut-on définir un flip qui conférerait une structure de treillis à ce graphe ?

Enfin, à plus brève échéance, une version "article" en anglais de ce mémoire devra être rédigée pour compléter la courte présentation écrite qui en a déjà été faite et qui a été acceptée aux **journées montoises 2004** (voir <http://www.jm2004.ulg.ac.be/> pour plus d'informations sur cette conférence).

# Bibliographie

- [1] D. Beauquier, M. Nivat, E. Remila, J.M. Robson, *Computational Geometry* **5** (1995), 1–25.
- [2] R. Berger, *The undecidability of the domino problem*. Memoirs of the American Mathematical Society, **66** (1966).
- [3] O. Bodini, M. Latapy, *Generalized Tilings with Height Functions*. To appear in Morfismos.
- [4] J. Cervelle, *Complexité structurelle et algorithmique des pavages et des automates cellulaires*. Thèse (2002).
- [5] J. H. Conway, J. C. Lagarias, *Tilings with polyominoes and combinatorial group theory*. J. Combin. Theory Ser. A. **53** (1990), 183–206.
- [6] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, *Introduction to algorithms*. MIT Press (1992).
- [7] S. Desreux, *An algorithm to generate exactly once every tiling with lozenges of a domain*. Theoretical Computer Science **303** (2003), 375–408.
- [8] S. Desreux, M. Matamala, I. Rapaport, E. Remila, *Domino tiling and related models : space of configurations of domains with holes*. Theoretical Computer Science **319** (2004), 83–101.
- [9] P. A. Davey, H. A. Priestley, *An introduction to lattices and order*. Cambridge Univ. Press (1990).
- [10] S. Desreux, E. Remila, *Optimal exhaustive generation of domino tilings of a polygon*. LIP Research Rapport 2003-04, ENS-Lyon, (2003), 225–231.
- [11] J-C. Fournier, *Tiling pictures of the plane with dominoes*. Discrete Mathematics **165** (1997), 105–128.
- [12] J-C. Fournier, *Combinatorics of perfect matching in plane bipartite graphs and application to tilings*. Theoretical Computer Science **303** (2003), 333–351.
- [13] J. Fakcharoenphol, S. Rao, *Planar graphs, negative weight edges, shortest paths, and near linear time*. FOCS 2001, 232–241.
- [14] P. W. Kasteleyn, *Graph theory and crystal physics*. Graph theory and theoretical physics, Academic Press, London (1967).
- [15] C. Kenyon, R. Kenyon, *Tiling a polygon with rectangles*. FOCS 1992, 610–619.
- [16] R. Kenyon, *A note on tiling with integer-sided rectangles*. J. Combin. Thy. Ser. A. **74** (1996), 321–332.
- [17] R. Kenyon, *The construction of self-similar tilings*. Geom. and Func. Analysis **6** (1996), 417–488.
- [18] J. Propp, *Lattice structure of orientations of graphs*. Preprint, 1993.
- [19] J. Propp, *Generating random elements of finite distributive lattices*. Preprint, 1997.
- [20] E. Remila, *Tiling a simply connected figure with bars of length 2 and length 3*. Discrete Mathematics **160** (1996), 189–198.
- [21] E. Remila, *Tilings with bars and satisfaction of Boolean formulas*. Europ. J. Combinatorics **17** (1996), 485–491.

- [22] M. S en echal, *Quasicrystals and geometry*; Cambridge Univ. Press (1995).
- [23] N. Thiant, *An  $\mathcal{O}(n \log n)$ -algorithm for finding a domino tiling of a plane picture whose number of holes is bounded*. Theoretical Computer Science **303** (2003), 353–374.
- [24] W. P. Thurston, *Conway’s tiling group*. American Mathematical Monthly, **97** (1990), 757–773.
- [25] H. Wang, *Proving theorems by pattern recognition*. Bell System Technical Journal, **40** (1961), 1–41.

### **Résumé**

Les pavages de régions finies du plan par des jeux de pièces simples (dominos ou losanges), notamment étudiés pour leurs applications en mécanique statistique, posent des problèmes algorithmiques et structurels. Depuis les années 90, d'importants progrès ont été réalisés. Mais la théorie - aujourd'hui en pleine expansion - reste inachevée, et de nombreux résultats pourtant similaires sont obtenus indépendamment. Ce mémoire rassemble et intègre ces résultats dans un cadre créé à cet effet. Plusieurs généralisations et extensions sont par la même occasion apportées.

### **Abstract**

Tilings of finite domains of the plane with simple tiles (dominoes or lozenges), especially studied in regard to their applications to statistical mechanics, raise both algorithmic and structural questions. Since the 90s, important progress was done. But the theory - today rapidly growing - is unachieved, and many results, nevertheless similar, are independently obtained. This report resumes and integrates these results into a frame created for that purpose. Several generalizations and extensions are brought as a result.