

# Conséquences d'un mot fini sur automates cellulaires de dimension 1.

Martin Delacourt sous la direction de Victor Poupet

février à juin 2008

## Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Définitions</b>  | <b>2</b>  |
| 1.1 Automates cellulaires . . . . .                         | 2         |
| 1.2 Signaux et produits cartésiens . . . . .                | 3         |
| 1.3 Conséquences d'un mot . . . . .                         | 4         |
| <b>2 Opérations classiques</b>                              | <b>7</b>  |
| 2.1 Transparence . . . . .                                  | 7         |
| 2.2 Interférences de conséquences . . . . .                 | 7         |
| 2.3 Produits cartésiens . . . . .                           | 8         |
| <b>3 Ensembles finis ou dirigés</b>                         | <b>8</b>  |
| 3.1 Ensembles finis . . . . .                               | 8         |
| 3.2 Ensembles dirigés . . . . .                             | 9         |
| <b>4 Ensembles constructibles</b>                           | <b>9</b>  |
| 4.1 Parabole . . . . .                                      | 9         |
| 4.2 Droites de pentes irrationnelles . . . . .              | 10        |
| 4.2.1 Cas général . . . . .                                 | 10        |
| 4.2.2 Conséquences . . . . .                                | 12        |
| 4.3 Entre compteurs . . . . .                               | 13        |
| 4.3.1 Détail des compteurs . . . . .                        | 14        |
| 4.3.2 Comparer deux compteurs . . . . .                     | 14        |
| 4.3.3 Contraintes sur les bords des compteurs . . . . .     | 15        |
| 4.3.4 Ensembles constructibles entre compteurs . . . . .    | 16        |
| <b>5 Ensembles qui ne peuvent pas être des conséquences</b> | <b>16</b> |
| 5.1 Sur des automates quelconques . . . . .                 | 17        |
| 5.2 Cas des automates réversibles . . . . .                 | 19        |

# Introduction

Ce stage a été effectué sous la direction de Victor Poupet au Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille, dans l'équipe Escape. On s'intéresse ici aux automates cellulaires, systèmes complexes constitués d'une infinité de cellules identiques, et communiquant de manière locale. C'est un puissant modèle de calcul massivement parallèle et synchrone. Les automates cellulaires sont notamment Turing-puissants. Il est donc possible d'obtenir, par automate cellulaire, toute fonction calculable. On connaît des automates cellulaires capables de simuler n'importe quelle machine de Turing ou n'importe quel automate cellulaire.

On peut aussi voir les automates cellulaires comme des systèmes complexes définis par des règles locales très simples. Ils ont été introduits par von Neumann qui s'intéressait aux systèmes capables d'auto-reproduction ([3]). Wolfram dans [4], en particulier, a donné une classification d'un groupe élémentaire d'automates cellulaires, en observant leur comportement au cours du temps, et en les triant selon leur complexité apparente. Le jeu de la vie, introduit par le mathématicien J. H. Conway, par exemple, est un automate cellulaire sur lequel on observe des comportements d'auto-reproduction. Un automate cellulaire permet le transfert d'information entre des entités simples, et grâce à la règle locale, les informations circulent à une vitesse bornée. On peut donc voir les automates cellulaires du point de vue des flux d'informations. Ces flux peuvent être coupés si on parvient à contrôler entièrement le comportement d'un groupe de cellules adjacentes. On obtient alors des murs, et aucune information ne pourra circuler de la droite vers la gauche ou inversement. Il existe des cas simples d'automates cellulaires avec des murs (identité, décalage), mais les murs sont alors de formes très simples. C'est dans cette optique que se place ce rapport, on cherche à déterminer quelles formes de murs (qu'on appellera conséquences) sont possibles. Plus précisément, on fixe une partie finie des conditions initiales et la règle d'évolution et on étudie l'ensemble des cellules dont l'état est fixé (à un temps donné) quelles que soient les conditions initiales laissées libres. Les questions que l'on se pose sont entre autres :

- Quels ensembles peut-on obtenir (dans le temps et l'espace) ?
- Dans quels états peuvent se trouver les cellules d'un tel ensemble (un ou plusieurs états...)?
- Pour un même automate, y a-t'il plusieurs formes possibles en fixant différents mots ?
- ...


## 1 Définitions

### 1.1 Automates cellulaires

Un automate cellulaire est un système complexe composé d'une infinité de petites machines (appelés *cellules*) disposées sur une grille régulière (en règle générale  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}^d$ ). À chaque étape de temps (temps discret), chaque cellule applique la règle de transition en recevant les informations de ses voisins uniquement. Formellement :

**Définition 1** Un automate cellulaire est un quadruplet  $\mathcal{A}=(d, V, Q, f)$  où

- $d \in \mathbb{N}$  est la dimension de l'automate ;
- $V = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \mathbb{Z}^d$  est un ensemble fini appelé voisinage de l'automate ;
- $Q$  est un ensemble fini, appelé ensemble d'états de l'automate ;
- $f : Q^{|V|} \rightarrow Q$  est appelée fonction de transition locale de l'automate.

Les états seront représentés par une couleur, et on confondra parfois les deux. Ici, on se restreint à la dimension 1, et on choisit en règle générale le voisinage le plus simple, de rayon 1 :  $\{-1, 0, 1\}$  (chaque cellule ne voit que sa voisine de droite, celle de gauche et elle-même). La fonction de transition devient donc une fonction  $f : Q^3 \rightarrow Q$ , que l'on représentera par un ensemble de règles (...). Les trois cellules inférieures sont les entrées de l'automate et l'état de sortie est donné par la cellule supérieure de la règle.

**Définition 2** Une configuration d'un automate cellulaire est la donnée des états de chaque cellule :  $c = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ .

A chaque étape de calcul, on obtient donc une nouvelle configuration. La règle locale de l'automate cellulaire induit une règle globale, on notera  $\mathcal{A}(c)$  la configuration image de  $c$  par  $\mathcal{A}$ , et  $\mathcal{A}^t(c)$  son  $t$ -ième itéré. Donc la cellule  $i$  au temps  $t$  est notée  $\mathcal{A}^t(c)_i$  si la configuration initiale est  $c$ . On représentera l'automate cellulaire par son *diagramme espace-temps*, c'est à dire l'ensemble des configurations placées les unes au dessus des autres. Par exemple, on a :

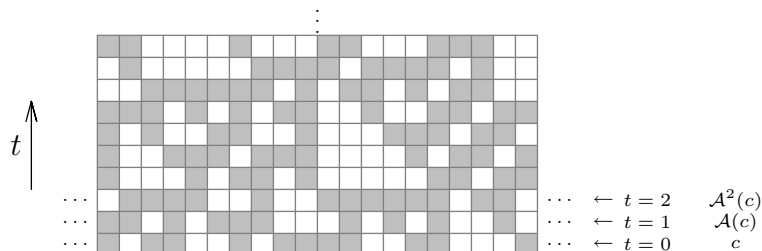


FIG. 1 – Diagramme espace-temps d'un automate à 2 états.

Le temps est dirigé vers le haut, et pour des raisons de finitude du rapport, on ne représente qu'un nombre fini de configurations sur un espace fini.

Dans la plupart des cas, on utilisera un état *blanc* ou *quiescent* tel que, lorsqu'une cellule et ses voisins sont dans l'état blanc, la cellule reste blanche. C'est typiquement un état qui remplit la configuration sans avoir de rôle calculatoire. On pourra aussi parler d'état *envahissant*, c'est un état qui se propage à vitesse maximale, c'est à dire que toute cellule qui le voit dans son voisinage passe dans cet état, et ne le quitte jamais.

## 1.2 Signaux et produits cartésiens

On introduit ici des concepts qu'on maniera par la suite. On les utilisera pour donner des versions intuitives de ce que l'on cherche à faire. On ne donnera donc pas de définitions rigoureuses de ce qu'est un signal par exemple, et les cas dans lesquels on les mentionnera ne prêteront pas à confusion.

On parlera souvent d'*informations* ou de *signaux* pour signifier que la règle de l'automate cellulaire génère des structures sur le diagramme espace-temps de l'automate cellulaire. Par exemple, lorsqu'une cellule voit un état  $q$  à sa gauche, elle se met dans l'état  $q$  au temps suivant. On a alors un signal  $q$  qui se déplace vers la droite. De tels signaux peuvent entrer en collision. Par exemple un signal  $q$  qui se déplace vers la droite et  $q'$  qui se déplace vers la gauche. Lorsqu'une cellule voit  $q$  à gauche et  $q'$  à droite, soit un des deux signaux est prédominant, auquel cas elle prend l'état correspondant, et l'autre signal est coupé. Soit cela génère un autre signal  $q''$ , soit encore cela annule les deux. De manière plus générale, il peut y avoir transmission d'information entre deux cellules si par un chemin dans le diagramme espace temps, l'une influence l'autre. C'est à dire qu'une suite de cellules qui s'influencent successivement mène d'une des deux cellules à l'autre. Cette transmission peut être coupée si une autre transmission d'information prédominante lui coupe la route. On peut souvent visualiser signaux et transmissions d'informations sur le diagramme espace-temps par des segments ou des zones de couleur uniforme. Parfois, un état envahissant pourra être considéré comme un signal par exemple.

Lorsqu'un signal est une droite, on parle de pente du signal, qui est la pente de la droite. On pourra aussi utiliser le terme de vitesse qui est l'inverse de la pente.

Pour visualiser plus clairement certaines situations, on préférera parfois des dessins schématiques dans le demi-plan continu  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . On retrouvera alors des schémas de géométrie classique (droites et fonctions continues). Par exemple, pour deux signaux qui se rencontrent et en forment un troisième, on obtient la figure 3.



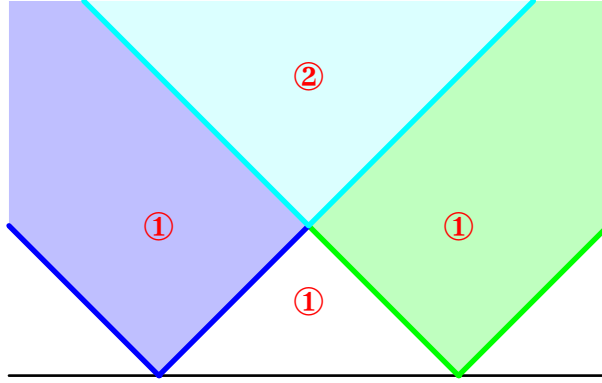


FIG. 5 – Produit cartésien de trois automates cellulaires.

sur des configurations bi-infinies, on peut fixer le début du mot en 0 sans faire de restrictions. Cet ensemble dépend de l'automate et du mot fini.

On commence par définir l'ensemble des configurations contenant ce mot en 0 :

**Définition 3** Le cylindre de  $u$  est l'ensemble des configurations contenant le mot  $u$  à l'origine :  
 $\mathcal{O}(u) = \{c \in Q^{\mathbb{Z}} / \forall 0 \leq i \leq |u|, c_i = u_i\}$ .

**Définition 4** L'ensemble des conséquences d'un mot fini  $u$  sur un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  est :  
 $\mathcal{C}_{u,\mathcal{A}} = \{(i, t), i \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N} / \exists q \in Q, \forall c \in \mathcal{O}(u), \mathcal{A}^t(c)_i = q\}$ .

Lorsqu'il n'y pas de confusion possible, on écrira seulement  $\mathcal{C}_u$ . On regardera les conséquences sur le diagramme espace-temps, ce qui permet de parler de courbes discrètes, et d'ensemble en deux dimensions.

Un automate cellulaire est déterministe par définition, donc l'ensemble des cellules, dont le calcul ne nécessite que des cellules du mot fini fixé, sont dans les conséquences, c'est à dire l'ensemble des cellules du « cône » au dessus du mot (fig. 6).

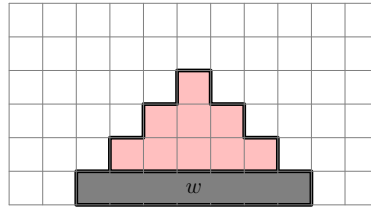


FIG. 6 – En rouge, le cône associé au mot  $w$  en gris.

On peut maintenant définir la clôture par cônes  $\mathcal{CC}$  qui consiste à transformer un ensemble quelconque en une union de cônes. La clôture par cônes sera l'union infinie de la suite des complétés par cône de cet ensemble. Pour un ensemble  $E \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ , la complétion par cône transforme  $E$  en  $\mathcal{K}(E) = E \cup E'$  où  $E' = \{(i, t) | t > 0, (i - 1, t - 1), (i, t - 1), (i + 1, t - 1) \in E\}$ . On a donc

$$\mathcal{CC}(E) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{K}^n(E).$$

On peut définir un deuxième type de cônes. En effet, on a vu les cônes fermés représentant l'ensemble des cellules qui ne dépendent que du mot considéré, on regarde maintenant les cônes ouverts contenant

toutes les cellules susceptibles d'être influencées par un mot. Ce cône est borné par des « diagonales discrètes » (fig.7) qui représentent la vitesse maximale de communication dans l'automate. En effet, avec un voisinage de rayon 1, l'état d'une cellule n'influencera sa  $n$ -ième voisine qu'après  $n$  étapes de calcul. C'est donc une limite structurelle au calcul et à la communication. C'est dans ces cônes ouverts que se situeront les conséquences.

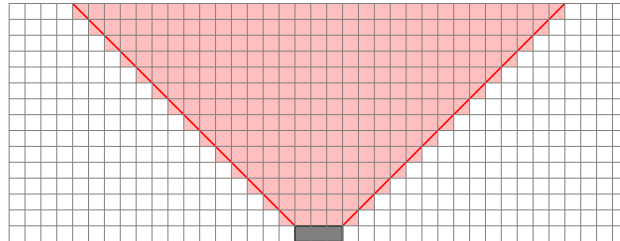


FIG. 7 – En rouge, les cellules qui peuvent être influencées par le mot gris.

On a quelques exemples évidents d'automates cellulaires sur lesquels des mots ont des conséquences non réduites à ce « cône ». Par exemple l'automate identité (chaque cellule garde toujours le même état), dans ce cas, les conséquences d'un mot (quel qu'il soit) seront la « bande » de largeur la largeur du mot et se propagent en ligne droite (fig.8). Avec l'automate décalage (chaque cellule prend l'état de sa voisine de gauche), on a encore une bande mais inclinée.

Pour d'autres automates, les conséquences dépendent du mot fixé. Par exemple pour l'automate majorité (2 états 0 et 1, chaque cellule se met dans l'état présent majoritairement dans son voisinage), le mot 010 n'a aucune conséquence hors du cône. En effet si on ne met que des 1 sur le reste de la configuration, on n'aura que des 1 hors du cône (fig.10). Si on ne met que des 0, on n'aura que des 0 (fig.9). Mais avec ce même automate et le mot 000, toutes les cellules au dessus de ce mot dans le diagramme espace temps seront dans l'état 0 quel que soit le reste de la configuration initiale.

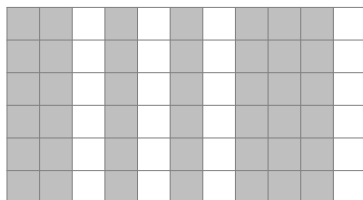


FIG. 8 – Automate identité.

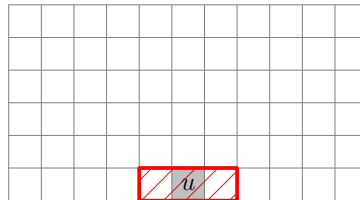


FIG. 9 – Règle majorité (1).

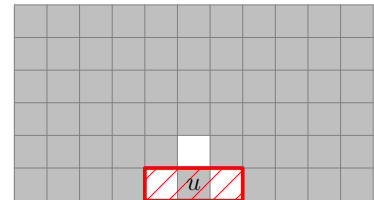


FIG. 10 – Règle majorité (2).

Si on s'intéresse aux états des cellules d'un mot, on voit apparaître certains problèmes. Par exemple supposons qu'on veuille que les conséquences d'un mot  $u$  (à définir) soient une ligne verticale dans l'état rouge, et une ligne diagonale dans l'état bleu. On va donner un exemple de configuration initiale pour laquelle cet ensemble de conséquences pose problème. En effet, il suffit de placer une deuxième fois le mot  $u$  dans la configuration. A un certain temps, une ligne rouge et une ligne bleue se rencontreront, et la cellule qui sera à la rencontre des deux devra être à la fois rouge et bleue : impossible.

On veut savoir quelles formes peuvent prendre ces ensembles de conséquences, en particulier :

- Quels ensembles finis/infinis sont possibles ?
- Y a-t-il une direction de propagation de ces conséquences ?
- Les conséquences sont-elles toujours périodiques ?
- Peut-il y avoir plusieurs états différents dans les conséquences d'un même mot ?
- Quels liens y a-t-il entre les conséquences de mots différents sur un même automate ?

## 2 Opérations classiques

On expose ici des techniques que l'on utilisera par la suite.

### 2.1 Transparence

Le but est d'éviter que les cellules utilisées pour la construction soient dans l'ensemble de conséquences. En effet, ces cellules doivent transmettre l'information nécessaire au calcul, mais ne doivent pas être complètement fixées, puisqu'elles ne font pas partie de l'ensemble des conséquences. Pour obtenir un tel résultat, on fait un produit cartésien de l'automate cellulaire utilisé avec un automate à 2 états. On va faire ce produit cartésien sur toutes les cellules de construction ou neutres de l'automate cellulaire. En effet, les cellules de l'ensemble de conséquences doivent être fixées et ne peuvent à ce titre être un couple d'états dont un est indépendant de la construction que l'on fait.

On a donc un automate cellulaire  $\mathcal{A}$  auquel on ajoute un automate  $\mathcal{B}$  qui n'a que deux états *blanc* et *bleu*. Certains états (que l'on utilisera pour l'ensemble de conséquences) de l'automate  $\mathcal{A}$  seront prédominants dans le produit cartésien et imposeront à la partie de  $\mathcal{B}$  correspondante d'être toujours blanche. Les états *blanc* et *bleu* sont quiescents dans  $\mathcal{B}$ .

Lorsque l'on voudra montrer que les zones de constructions ne sont pas dans l'ensemble des conséquences, on prendra deux configurations bi-infinies initiales  $c$  et  $c'$ . Toutes les deux contiendront le mot  $u$  fini qui génère les conséquences  $\mathcal{C}_{u,\mathcal{A}}$ , mais  $c$  aura sur le reste de la configuration le couple  $(q, \text{blanc})$  alors que  $c'$  aura le couple  $(q, \text{bleu})$ . Ainsi toute cellule qui n'est pas entièrement déterminée par  $u$  recevra à un moment une information venant d'une cellule de la configuration initiale, donc sera dans un état  $(x, \text{blanc})$  dans l'évolution de  $c$  et  $(x, \text{bleu})$  pour  $c'$ , pour un état  $x$  de  $\mathcal{A}$ .

### 2.2 Interférences de conséquences

Le but ici est de montrer que, selon la forme du mot  $u$  et de ses conséquences, on peut obtenir des liens entre les états de différentes cellules. Pour cela, l'idée est de réutiliser  $u$ , en le plaçant quelque part sur le reste de la configuration initiale. Ce double de  $u$  aura aussi des conséquences qui pourront, selon l'endroit où le mot est placé, interférer avec les conséquences du premier  $u$ . En effet, supposons que deux mots placés en des endroits différents de la configuration initiale aient une même cellule dans leurs ensembles de conséquences. Cette cellule n'a qu'un seul état, donc dans les deux ensemble de conséquences, elle a cet état. On peut alors enlever un des deux mots de la configuration initiale, cette cellule aura toujours cet état dans les conséquences du deuxième.

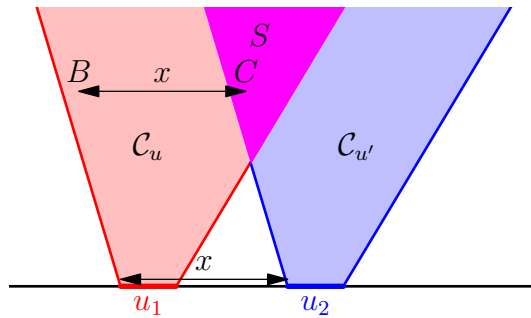


FIG. 11 – En magenta, les interférences entre les conséquences des mots  $u_1$  et  $u_2$  (ici égaux).

Dans la plupart des cas, le raisonnement se fera avec un seul mot ayant des conséquences, il s'agira donc de le placer correctement pour obtenir les interférences voulues. On suppose donc que l'on place deux instances  $u_1$  et  $u_2$  de  $u$  en 0 et en  $x$  sur la configuration initiale. Et on s'intéresse à l'intersection des conséquences des deux mots :  $E = \mathcal{C}_u \cap (\mathcal{C}_u + x)$  (où  $(A + x)$  est l'ensemble des cellules de  $A$

translatées de  $x$ ), c'est à dire  $E = \{(a, b)/(a - x, b) \in \mathcal{C}_u\}$ . Et pour tout  $(a, b) \in E$ ,  $(a, b)$  peut être vue comme la conséquence de  $u_1$ , ou (en tant que  $(a + x - x, b)$ ) comme la conséquence de  $u_2$ . Donc  $(a, b)$  et  $(a - x, b)$  ont le même état. Or  $x$  peut prendre toute valeur supérieure à  $|u|$ , donc si deux cellules des conséquences de  $u$  ont une différence d'abscisse de plus de  $|u|$ , elles prennent le même état. On en déduit encore que si un segment horizontal de longueur supérieure à  $2|u|$  est inclus dans les conséquences de  $u$ , il est monochrome. Sur la figure 11, les points B et C sont dans le même état qui sera l'état de toutes les conséquences à cette hauteur.

De plus, on sait que si un segment de longueur  $k$  est inclus dans les conséquences d'un mot  $u$  à l'étape  $t$ , ce même segment privé des cellules à ses extrémités (et donc de longueur  $(k - 2)$ ) est dans les conséquences de  $u$  à l'étape  $(t + 1)$  (l'ensemble des conséquences est clos par cônes). Si un segment est de longueur suffisante et donc monochrome, on en déduit la couleur de toutes les cellules du cône qu'il engendre.

### 2.3 Produits cartésiens

On utilise les produits cartésiens pour obtenir de nouveaux ensembles de conséquences.

**Proposition** *Soit deux automates  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , avec des mots  $u$  et  $v$  de même longueur, on fait le produit cartésien des 2. Et  $w$  le produit cartésien de  $u$  et  $v$ . Alors les conséquences de  $w$  sont l'intersection des conséquences de  $u$  et  $v$ .*

En effet, si une cellule est une conséquence de  $w$ , elle est conséquence de  $u$  dans  $\mathcal{A}$ , et de  $v$  dans  $\mathcal{B}$ , et réciproquement. L'ensemble des conséquences de  $w$  est alors l'intersection des deux ensembles de conséquences.

Souvent, on aura deux mots de longueurs différentes, obtenir l'intersection des ensembles de conséquences n'est à priori pas toujours possible, on aura un sur-ensemble de l'intersection. Toutefois dans les constructions que l'on explicitera par la suite, on pourra agrandir les mots à l'aide de l'état quiescent sans changer les conséquences.

## 3 Ensembles finis ou dirigés

Dans cette partie, on traitera de cas simples, et l'on répondra aux questions de construction des ensembles de conséquences finis, ou contenus entre deux droites parallèles.

### 3.1 Ensembles finis

On veut obtenir en conséquences un ensemble  $E$  fini quelconque. On pose  $k = \max\{i|\exists t, (i, t) \in E\} - \min\{i|\exists t, (i, t) \in E\}$ . Et on va montrer qu'il existe un mot  $u$  de longueur  $k$  ayant pour conséquences l'union du cône de  $u$  et de  $\mathcal{CC}(E)$ . On va noter  $T = \max\{t|\exists i, (i, t) \in \mathcal{CC}(E)\}$ , et on fait un automate  $\mathcal{A}$  avec  $kT + 1$  états. On utilise les  $kT$  états pour remplir le rectangle de base  $u$  et de hauteur  $T$ . On remplit le reste du demi-plan avec le  $k + 1$ -ième état (blanc). On obtient donc des règles imposées par l'agencement de ces états. Toute cellule de ce rectangle (exceptées à l'étape 0) est le résultat d'une transition. On peut ainsi définir une partie de la règle de transition. Sur le bord du rectangle, lorsque seuls deux arguments de la règle sont dans le rectangle, on donne le même résultat quel que soit le troisième argument (blanc ou non). Comme on a pris  $kT$  états tous différents, on n'a aucune redondance, donc aucun risque de contradiction dans les règles.

On rend alors transparents (au moyen d'un produit cartésien) tous les états des cellules qui ne sont pas dans  $\mathcal{CC}(E)$ . Le mot  $u$  impose donc le rectangle de taille  $kT$  devant lui grâce aux règles que l'on a choisies, on sait de plus que tous les états qui n'occupent pas des cellules de  $\mathcal{CC}(E)$  sont transparents, donc ne sont pas dans les conséquences. On a donc  $\mathcal{C}_{u, \mathcal{A}} = \mathcal{CC}(E)$ .

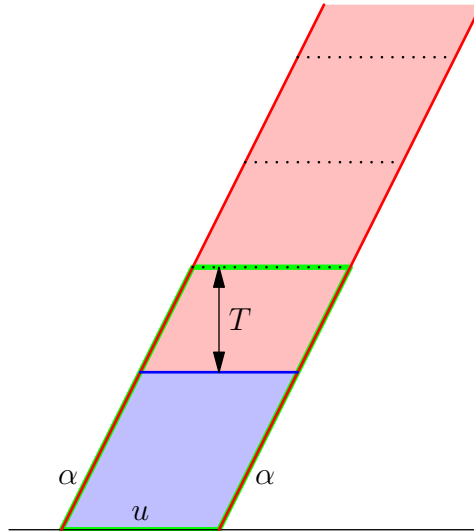


FIG. 12 – Conséquences entre deux droites parallèles de pentes  $\alpha$ .

### 3.2 Ensembles dirigés

On s'intéresse maintenant à des ensembles infinis que l'on peut entièrement placer entre deux droites parallèles de pente rationnelles. Soit  $E$  un tel ensemble, encadré par deux droites de pente  $\alpha$ . On ne considère en fait que les ensembles ayant ultimement un vecteur de périodicité (nécessairement de direction  $\alpha$ ). On montre que tout tel motif périodique peut être obtenu comme conséquences d'un mot  $u$  (après clôture par cônes).

On va réutiliser les mêmes procédés que pour les ensembles finis. On suppose que la distance entre les deux droites est  $k$ , que le vecteur de périodicité est d'ordonnée  $T$ , et qu'on a au début un ensemble fini de taille  $kn$  hors de la périodicité. On utilise alors  $(kT + kn)$  états, et on crée la règle de la même manière que pour un ensemble fini. On peut ensuite rendre transparents les états que l'on ne veut pas avoir en conséquences, et on a obtenu un mot  $u$  ayant  $\mathcal{CC}(E)$  comme conséquences. (Voir fig.12.)

## 4 Ensembles constructibles

On va maintenant présenter des constructions permettant d'obtenir des ensembles non triviaux en conséquences d'un mot fini.

### 4.1 Parabole

On souhaite construire une parabole discrète, on verra ensuite comment faire pour qu'elle soit conséquence d'un mot. Fischer, dans [5] a donné une méthode pour construire une parabole, c'est ici une méthode proche de la sienne que l'on va utiliser. On va construire la parabole associée à la fonction  $f : x \mapsto x^2$ . Cette fonction est telle que  $f(x+1) = f(x) + 2x + 1$ . Car  $x$  est exactement la distance à l'axe des ordonnées dans le diagramme espace temps. Donc il suffit d'attendre le temps d'aller à vitesse 1 jusqu'à l'origine et de revenir, avant de décaler la courbe de la fonction. (Voir fig.13.) On envoie donc un signal vertical (rouge) qui servira de référence, et un signal à sa droite (noir) qui tracera la parabole. Entre les deux, on fait rebondir un signal (vert et bleu), qui « pousse » la courbe de la parabole d'une cellule vers la droite lorsqu'il la rencontre (jaune).

On veut maintenant qu'un mot  $u$  ait cette parabole pour conséquences. On va alors prendre le mot de la figure 13 (rouge, vert, blanc, noir), et on impose que lorsqu'une cellule voit un état noir à sa gauche,

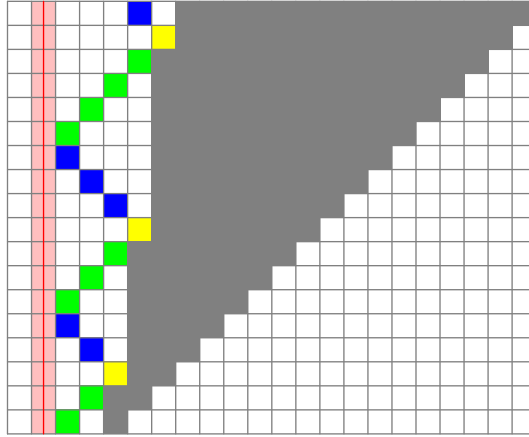


FIG. 13 – Construction d’une parabole par automate cellulaire.

elle devienne noire. De plus, une cellule dans l’état noir le reste sauf si elle voit un bleu à sa gauche, auquel cas elle devient jaune. Ensuite, on impose que l’état rouge le reste toujours (sauf lorsqu’il voit un noir à sa gauche). On impose encore que si deux signaux bleu et vert se croisent, le bleu passe, le vert est supprimé. Et si deux signaux bleus ou deux verts se suivent, ils disparaissent tous les deux. Le mot  $u$  a alors pour conséquences tout l’espace contenu entre la parabole qu’il engendre et la droite de pente maximale vers la droite.

En effet, la parabole se construit normalement jusqu’à ce qu’un noir arrive sur le rouge, auquel cas, il passe. Mais alors toute la zone de construction de la parabole devient noire, et donc, tout est noir jusqu’à la limite droite. De plus, lorsqu’un signal vert creuse la parabole, cela émet un signal bleu dans l’autre sens. Donc si plusieurs signaux verts viennent à la suite, seul le premier passe, les suivants sont détruits par le bleu. On peut donc prouver que dans tous les cas, la zone entre la parabole et la droite de pente maximale est bien dans l’état noir. En revanche toutes les autres cellules de construction peuvent devenir noires par exemple en répétant le même mot  $u$  directement à gauche de la première occurrence. On peut aussi rendre transparents tous les états non noirs. Ainsi l’ensemble de conséquences est bien celui attendu.

## 4.2 Droites de pentes irrationnelles

### 4.2.1 Cas général

Le principe est ici le même que pour la parabole, on construit la droite de pente irrationnelle, puis on ajoute une grande zone noire à sa droite. Le noir sera toujours prédominant lorsqu’il viendra de la gauche. Pour construire une droite de pente irrationnelle, on peut utiliser les propriétés des mots sturmiens. En effet, ce sont des mots que l’on peut construire algorithmiquement, et qui, agencés correctement dessinent une droite de pente irrationnelle. On va ici prendre le mot de Fibonacci défini sur l’alphabet  $\{a, b\}$  par le morphisme

$$f : \begin{array}{l} a \mapsto ab \\ b \mapsto a \end{array}$$

On pose  $u_0 = a$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Donc :

- $u_1 = ab$
- $u_2 = aba$
- $u_3 = abaab$
- $u_4 = abaabab$
- ...

Comme  $a$  est préfixe de  $f(a)$ , on sait que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  est préfixe de  $u_{n+1}$ . Donc on peut définir un mot  $u$  limite de la suite  $u_n (n \in \mathbb{N})$ . On peut prouver ([2]) que ce mot permet de tracer une droite de pente



Il y aura deux types de signaux, le  $A$  qui va écrire un  $a$  puis un  $b$  décalé, et le  $B$  qui écrit un  $a$ . La droite sera constituée d'états de 3 types :

- rouge lorsqu'on écrit un  $a$  à cause d'un signal  $A$ ,
- bleu lorsqu'on écrit un  $b$  (forcément à cause d'un signal  $A$ ),
- et vert lorsqu'on écrit un  $a$  à cause d'un signal  $B$ .

La file elle sera constituée de cellule dont l'état est un triplet  $(x, y, z)$ .  $x$  contiendra un signal qui remonte vers la queue de la file,  $y$  et  $z$  vont vers la tête. En remontant la file, les signaux se déplacent d'une cellule par étape jusqu'à atteindre la queue. En se dirigeant vers la tête, ils se déplacent d'un cran, soit en passant de  $y$  à  $z$  dans une cellule, soit en passant de  $z$  à  $y$  dans la cellule de droite (voir fig. 16).

|    |     |     |    |    |    |   |    |    |     |   |   |     |   |   |
|----|-----|-----|----|----|----|---|----|----|-----|---|---|-----|---|---|
| 9  | ... | ... | 6  | 14 | 13 | 3 | 11 | 10 | ... | 8 | 7 | ... | 5 | 4 |
| 12 | ... | 14  | 9  | 13 | 11 | 6 | 10 | 8  | 3   | 7 | 5 | ... | 4 | 2 |
| 15 | 14  | 13  | 12 | 11 | 10 | 9 | 8  | 7  | 6   | 5 | 4 | 3   | 2 | 1 |

FIG. 16 – Comportement des cellules de la file, chaque nombre représente un signal.

À certains moments, lorsque la construction de la droite se décale, il peut y avoir des vides dans ces cellules, on pousse alors les signaux vers la droite, et le vide se « déplace » vers la gauche jusqu'à sortir de la file.

|    |     |     |    |    |    |   |    |    |     |    |   |     |   |   |
|----|-----|-----|----|----|----|---|----|----|-----|----|---|-----|---|---|
| 9  | ... | ... | 6  |    | 14 | 3 | 13 | 11 | ... | 10 | 8 | ... | 7 | 4 |
| 12 | ... | 14  | 9  | 13 | 11 | 6 |    | 10 | 3   | 8  | 7 | ... | 4 | 2 |
| 15 | 14  | 13  | 12 | 11 | 10 | 9 | 8  | 7  | 6   |    | 4 | 3   | 2 | 1 |

FIG. 17 – Comportement des cellules de la file en présence d'un vide.

Sur la droite, la file sait qu'elle doit avancer lorsqu'elle voit un état rouge, sinon elle sait qu'elle reste en place, on a donc le comportement décrit figure 18.

|    |     |     |    |     |    |     |    |    |     |   |    |     |   |     |     |   |   |  |
|----|-----|-----|----|-----|----|-----|----|----|-----|---|----|-----|---|-----|-----|---|---|--|
| 6  | ... | ... | 3  | ... | 14 | $A$ | 13 | 11 | $A$ |   | 10 |     | 8 | 7   | $B$ | 5 | 4 |  |
| 9  | ... | ... | 6  | 14  | 13 | 3   | 11 | 10 | $A$ | 8 | 7  | $A$ |   | 5   |     | 4 | 2 |  |
| 12 | ... | 14  | 9  | 13  | 11 | 6   | 10 | 8  | 3   | 7 | 5  | $A$ | 4 | 2   |     |   |   |  |
| 15 | 14  | 13  | 12 | 11  | 10 | 9   | 8  | 7  | 6   | 5 | 4  | 3   | 2 | $A$ |     |   |   |  |

FIG. 18 – Comportement des cellules de la file en tête.

On peut montrer, de plus, que la file ne nécessite pas un espace infini à gauche.

#### 4.2.2 Conséquences

Pour obtenir cette droite en conséquences, on va, comme annoncé, utiliser les mêmes principes que pour la parabole. On veut créer cette droite avec la file qui la construit, et de l'autre côté une zone noire jusqu'à la droite de pente 1 (voir fig. 19). Donc l'état noir se propage vers la droite. Il se propage aussi verticalement sauf lorsqu'un état bleu arrive. De l'autre côté, on met un état bord de la queue de la file, il assure que rien ne perturbe la file. Si un état noir arrive par la gauche et rencontre l'état bord, il transforme tout en noir jusqu'à la droite. On prend comme mot  $u$  l'état bord de la file, un rouge et un noir.

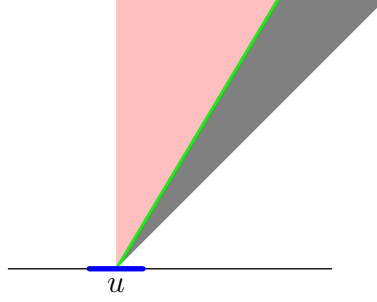


FIG. 19 – En rouge, la zone occupée par la file.

### 4.3 Entre compteurs

On cherche à isoler une zone du reste de l'espace pour pouvoir être libre d'y faire les constructions que l'on veut. On va noter  $S \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  cet ensemble, avec les protections qui l'entourent, dans le diagramme espace temps, et  $S_n \subset \mathbb{Z}$  son état à la  $n$ -ième étape. Or  $S$  doit être créée par un mot fini, donc rien n'empêche sa formation en plusieurs endroits de la configuration initiale. Et rien n'empêche non plus que la configuration initiale contienne  $S_n$  pour un quelconque  $n$ . On veut donc pouvoir distinguer l'occurrence de  $S$  qui sert à construire ce que l'on souhaite. Clairement, deux zones identiques ne pourront pas être distinguées, donc on doit fusionner les deux et non pas choisir. Mais si les deux occurrences de  $S$  sont différentes, on veut choisir celle qui nous intéresse. Pour cela on va faire en sorte que  $S$  ait sur ses bords un compteur qui témoigne de son âge. On s'arrange ensuite pour que ces compteurs ne soient générés que par un seul état qui n'est obtenu par aucune règle de transition. Ainsi cet état ne peut être présent que dans la configuration initiale. On prend alors cet état comme mot initial  $w$ . Lorsque deux compteurs se rencontrent, ils doivent être capables de détecter le plus jeune, de le laisser passer et d'effacer l'autre.

Les compteurs seront placés entre deux droites de pentes différentes, on utilise des compteurs unaires. Ils sont limités par un état de début de compteur, et un état de fin. On distingue entièrement les états utilisés dans les compteurs gauches, de ceux utilisés dans les compteurs droits. Les états de début de compteur effacent tout ce qu'ils rencontrent sauf un état de début de compteur opposé. Dans ce cas, ils déterminent le plus ancien des deux compteurs et l'effacent. Sur la figure 20, les zones  $S_1$  et  $S_3$  sont les compteurs gauches et droits, et la zone  $S_2$  centrale permet de construire librement ce que l'on souhaite.

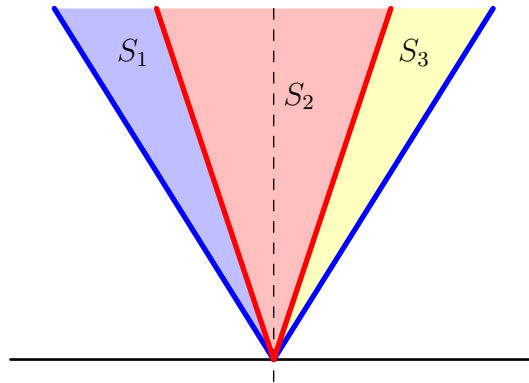


FIG. 20 – La zone  $S_2$  sans contrainte entre les compteurs  $S_1$  et  $S_3$ .

Il existe quelques restrictions à ce procédé. D'une part, on l'a vu, lorsque deux compteurs sont dans le même état (ils ont été créés à la même étape), il faut fusionner les contenus des ensembles  $S_2$ , donc il est nécessaire que l'ensemble de conséquences que l'on veut construire n'interfère pas avec une translation de lui-même. D'autre part, il faut du temps pour comparer les âges des compteurs, ce qui impose des restrictions sur les pentes des droites qui les délimitent. Et pour finir, un compteur a besoin d'un espace

croissant non borné (sinon, il est borné lui aussi puisqu'on ne dispose que d'un nombre fini d'états). On va voir comment préciser ces conditions.

### 4.3.1 Détail des compteurs

On va utiliser des compteurs unaires de ratio  $k$  pour calculer. Par exemple, on va détailler le compteur droit, il suffira de symétriser pour obtenir le compteur gauche. Les compteurs doivent être créés simultanément par un même état initial. On a alors en quelques étapes deux états juxtaposés, un marquant le début (à l'extérieur de la construction), l'autre la fin (à l'intérieur) du compteur. Ce sont tous les deux des signaux, mais la pente du signal de début de compteur est moins forte. La cellule de début de compteur envoie à chaque étape un signal vers la cellule de fin. Le premier se colle simplement sur le début du compteur en devenant un marqueur 1. Puis les signaux suivants vont se rajouter, en se superposant, pour devenir des marqueurs  $2, 3, \dots, k$ . Lorsque le  $(k + 1)$ -ième arrive, il poursuit son chemin et met un marqueur 1 à côté du marqueur  $k$ . Et ainsi de suite, les marqueurs prennent la première place libre qu'ils trouvent. Comme l'espace dont dispose le compteur croit de manière linéaire, il existe  $k$  tel que la place soit toujours suffisante pour ajouter 1.

Cette manière de fonctionner suffirait telle quelle si le début du compteur était fixe. Or il décrit une droite non verticale, donc, on va ajouter un déplacement suivant cette droite aux marqueurs. Qui plus est on synchronise ce déplacement avec celui du début de compteur. Ainsi on peut fonctionner de la même manière que si le début était fixe.

|     |     |  |  |   |                     |                     |                     |     |  |
|-----|-----|--|--|---|---------------------|---------------------|---------------------|-----|--|
|     | $F$ |  |  |   | 3                   | $\overleftarrow{k}$ | $\overleftarrow{k}$ | $D$ |  |
| $F$ |     |  |  |   | 2                   | $\overleftarrow{k}$ | $\overleftarrow{k}$ | $D$ |  |
| $F$ |     |  |  | 1 | $\overleftarrow{k}$ | $\overleftarrow{k}$ | $D$                 |     |  |
| $F$ |     |  |  |   | $\overleftarrow{k}$ | $\overleftarrow{k}$ | $D$                 |     |  |
| $F$ |     |  |  |   | $k$                 | $\overleftarrow{k}$ | $D$                 |     |  |

FIG. 21 – Évolution d'un compteur droit (zone  $S_3$ ).

Sur la figure 21, le début du compteur (bleu) envoie des marqueurs vers la fin (rouge). La flèche  $\leftarrow$  représente un signal ou marqueur émis par  $D$ . Ces marqueurs vont se placer sur la première cellule sur laquelle une place est disponible. En blanc, ce sont les extérieurs du compteur (intérieur à la construction à gauche, et extérieur à droite).

### 4.3.2 Comparer deux compteurs

La comparaison de deux compteurs intervient lorsqu'un début de compteur droit rencontre un début de compteur gauche. Comme on utilise des compteurs unaires, il suffit de comparer les tailles des deux compteurs, et à taille égale, de comparer l'état de la cellule extrême.

Le schéma de la rencontre de deux compteurs est fait sur la figure 22. Les 2 compteurs se rencontrent au point  $A$ , on envoie alors deux signaux à vitesse maximale, un vers la gauche (vert), un vers la droite (magenta). Ces deux signaux rebondissent sur l'extrémité opposée de leur compteur et reviennent vers le centre. Du point  $A$ , on émet aussi un signal vertical qui servira de référence. Le premier des deux signaux à atteindre la référence (ici au point  $B$ ) est celui qui a parcouru le compteur le plus court, donc le plus jeune, donc celui que l'on veut garder (ici on veut garder le compteur gauche ①). Il faut ensuite aller chercher et détruire le bord gauche du compteur droit ② (au point  $C$ ), c'est ce même signal qui accomplit cette tâche. Et lorsqu'il a détruit ce bord, il remonte le compteur jusqu'à l'autre bord et se

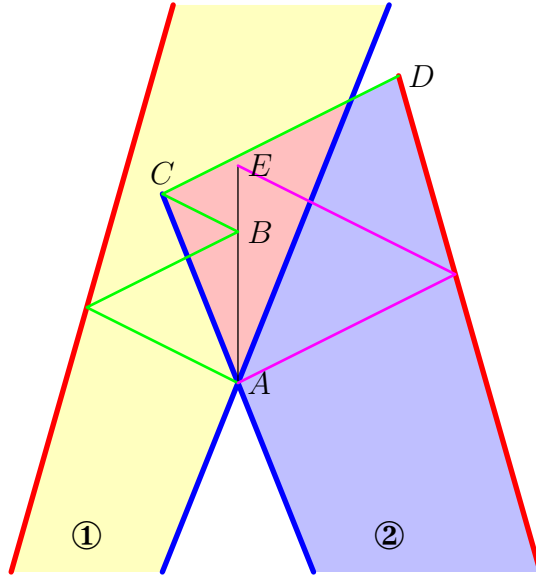


FIG. 22 – Rencontre de deux compteurs et élimination du plus vieux.

détruit en même temps qu'il supprime le compteur (point  $D$ ).

Le second signal issu de  $A$  revient sur la référence en  $E$  (après le premier signal), et il se détruit avec la référence. Ainsi, il ne reste qu'un compteur, non perturbé, à la fin, qui va détruire le contenu de l'autre zone  $S$ . La superposition de deux compteurs se fait grâce à un produit cartésien.

Dans le cas où les deux compteurs ont le même âge, les signaux issus de  $A$  reviennent au même instant sur la référence. On détruit alors les deux compteurs simultanément, et les contenus ne seront pas affectés..

### 4.3.3 Contraintes sur les bords des compteurs

Lors de la comparaison de deux compteurs, il faut supprimer le plus ancien des deux avant qu'il n'ait pénétré à l'intérieur de la zone de construction de l'autre. En effet, cette zone est supposée vierge de toute contrainte, et on doit pouvoir y construire ce que l'on veut. Donc, on veut éviter que le point  $C$  (sur la figure 22) ne dépasse le bord gauche du compteur ①. C'est cela qui va donner une borne sur les pentes possibles pour les bords des compteurs.

Sur la figure 23, on a le schéma limite, et on trouve les équations suivantes en mettant l'origine en  $A$  :

- $(D_1) : y = \alpha x + \alpha a$
- $(D_2) : y = -\beta x$
- $(D_3) : y = -x$
- $(D_4) : y = x + 2\frac{a\alpha}{\alpha+1}$
- $(D_5) : y = -x + 2\frac{a\alpha}{\alpha+1}$

Et les points :

- $F(-a\frac{\alpha}{\alpha+1}, a\frac{\alpha}{\alpha+1})$
- $C(-a\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, a\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta})$  (intersection de  $(D_1)$  et  $(D_2)$ .)

On peut ensuite en déduire que :  $\beta = \frac{3\alpha+1}{\alpha-1}$  ( $C \in (D_5)$ ) , et en ajoutant la condition  $\beta < \alpha$  (la pente intérieure du compteur est plus grande que l'extérieure), on obtient :  $\alpha > 2 + \sqrt{5}$ . Donc par exemple, le couple  $(\alpha = 5, \beta = 4)$  est solution.

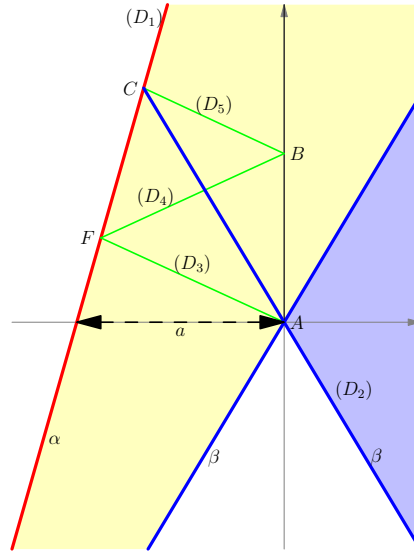


FIG. 23 – Pentes limites pour la rencontre de deux compteurs.

Le but étant d’obtenir une zone constructible aussi grande que possible, on veut effectivement être sur la limite. N’importe quelle valeur supérieure à  $2 + \sqrt{5}$  pour  $\alpha$  est possible, moyennant un temps initial de mise en place, et un compteur unaire de ratio  $\frac{1}{\alpha - \beta}$ .

#### 4.3.4 Ensembles constructibles entre compteurs

Tout ensemble de conséquences constructible de cette manière doit clairement pouvoir tenir entre des droites de pente  $\alpha$  et  $-\alpha$  avec la contrainte vue plus haut. La zone de construction peut, elle, s’étendre plus. On peut faire, si nécessaire, un produit cartésien pour la superposer avec les compteurs. Le problème est d’avoir des zones qui se fusionnent correctement. En réalité, ce n’est pas une contrainte forte si on accepte que la partie entre les deux zones se remplisse de noirs. Par exemple, on peut obtenir comme conséquences toute la zone entre une parabole et le bord du compteur. Sur la figure 24, on construit cette zone, le signal vert permet la construction.

Ici, on ne construit plus la parabole comme en 4.1, mais de l’autre côté, le principe est toujours de décaler la courbe de 1 aux  $(2n + 1)$ -ièmes étapes. Cette fois, on n’a plus une droite verticale comme référence, on va donc construire une deuxième parabole d’équation (2) :  $x \mapsto (\frac{x}{2})^2$  utilisée comme référence. Les deux paraboles se construisent simultanément, en faisant rebondir un signal entre elles. Lorsque ce signal atteint la parabole extérieure (2), celle-ci se décale de 2, lorsqu’il atteint la parabole intérieure, elle se décale de 1.

On avait vu en 4.1 la construction d’une parabole avec une large zone noire à droite, cette fois, on a une zone noire à gauche. L’intérêt est de faire un produit cartésien des deux automates, on peut alors (en synchronisant les deux constructions) obtenir en conséquences la parabole seule.

## 5 Ensembles qui ne peuvent pas être des conséquences

On veut maintenant trouver des ensembles qui ne sont conséquences d’aucun mot sur automates cellulaires de voisinage  $\{-1, 0, 1\}$ . On s’intéresse dans un premier temps à des automates quelconques, puis on s’intéressera au cas particuliers des automates réversibles.

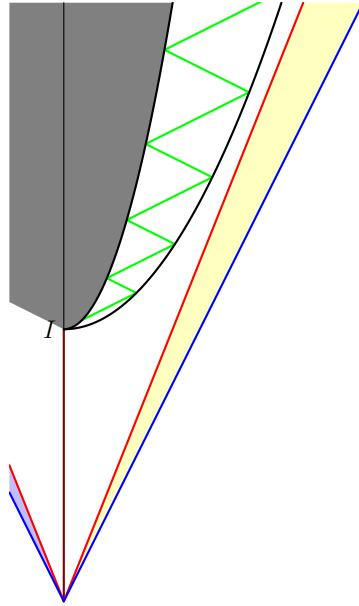


FIG. 24 – Construction d’une parabole entre compteurs.

## 5.1 Sur des automates quelconques

On propose ici un résultat d’impossibilité. Il est non trivial au sens où il ne découle pas simplement d’une deuxième occurrence du mot de départ qui aurait des conséquences ne s’accordant pas avec la première occurrence. En revanche, il ne concerne qu’une construction très précise, et ne s’étend pas à beaucoup d’autres situations.

On veut montrer qu’aucun mot fini sur un automate cellulaire n’a pour conséquences la zone  $S$  comprise entre la droite de pente -1 et la parabole  $x \mapsto x^2$  (translatée). On suppose qu’il existe un mot fini  $u$  ayant pour conséquences cette zone entièrement remplie par un seul état noir. Et on suppose que cette zone démarre à l’étape  $z$  (la cellule 0 est noire à l’étape  $z$ ).

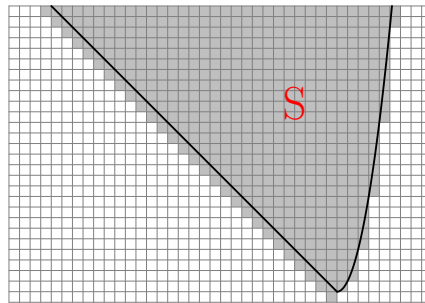


FIG. 25 – Zone  $S$  entre une droite de pente maximale et une parabole.

On s’intéresse aux conséquences du mot  $u0^n u$  où 0 est l’état noir. Les deux occurrences génèrent leurs zones noires, on connaît aussi le cône noir au dessus de  $0^n$ , car l’état noir est forcément quiescent. On va s’intéresser aux cellules entre ce cône et la zone noire droite. On a une bande de largeur constante de direction  $-1$  (en vert sur la figure 26). Or en faisant varier  $n$ , on obtient une bande de longueur arbitrairement grande. Comme les bords de cette bande sont invariants (noirs), il n’y a pas d’apport d’information. Et avec la finitude du nombre d’états, on conclut que cette bande (si on la considère infinie) est ultimement périodique. Notons  $k$  le nombre d’étapes au bout duquel le comportement devient

périodique et  $T$  la période. Et on note  $w_l$  le mot dans la bande après  $l$  étapes. Si  $l \geq k$ , c'est donc le même après  $l + T$  étapes,  $l + 2T$  étapes,  $\dots$ . On note alors  $v$  le mot compris entre les conséquences des 2 occurrences de  $u$  à l'étape  $k$ .

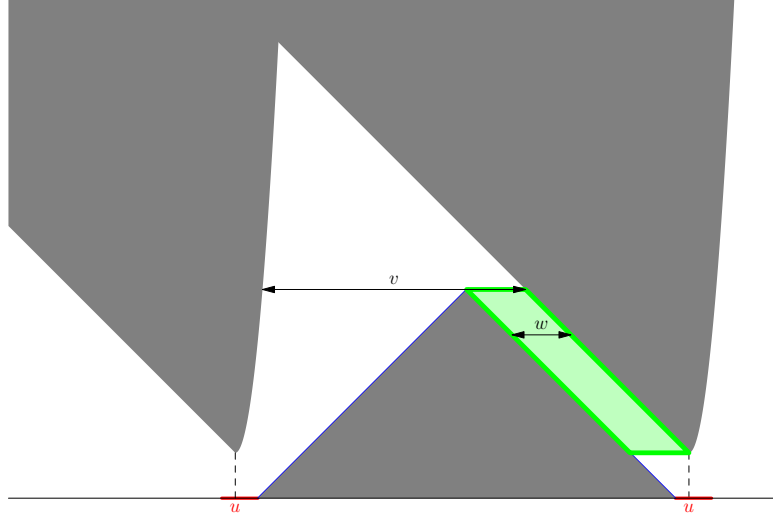


FIG. 26 – En vert la zone ultimement périodique entre les conséquences des deux  $u$ .

On va montrer qu'il existe une configuration bi-infinie engendrant un mur vertical noir d'abscisse 0, n'ayant à sa gauche que du noir, et tel que la colonne d'abscisse 1 ne soit pas ultimement noire. On constate simplement que la frontière de la parabole discrète contient des segments verticaux arbitrairement grands. On prend  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $c$  une configuration initiale contenant le mot  $u$ , et telle que le diagramme espace temps contienne un segment vertical noir de longueur au moins  $n$ . On note  $\mathcal{A}^{t_0}(c)_i \dots \mathcal{A}^{t_0+n}(c)_i$  les cellules de ce segment. On va encore exiger que  $\mathcal{A}^{t_0+n}(c)_{i+1}$  ne soit pas noire. Une telle configuration existe, sinon  $(i + 1, t_0 + n)$  serait dans les conséquences. On sait que  $\mathcal{A}^{t_0}(c)_{i-1}$  et  $\mathcal{A}^{t_0}(c)_i$  sont noires (dans les conséquences de  $u$ ). On va prendre la configuration :

$$c' = 0^\omega \mathcal{A}^{t_0}(c)_{i+1} \mathcal{A}^{t_0}(c)_{i+2} \dots \mathcal{A}^{t_0}(c)_{i+p} \dots$$

Cette configuration n'a que des noirs à gauche donc est stable, et à droite elle a le même comportement que  $\mathcal{A}^{t_0}(c)$ , donc elle construit un segment vertical de hauteur  $n$ , et  $\mathcal{A}^n(c')_{i+1}$  n'est pas noire. Par compacité, on sait donc qu'il est possible de trouver une configuration  $d$  créant un mur vertical infini d'abscisse 0 (par translation), tel que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists q \geq p, d_1(q) \neq 0.$$

On remarque maintenant que pour la construction de droite, il n'est pas nécessaire qu'il y ait une infinité de noirs, si la cellule d'abscisse 0 (le mur) reste toujours noire, on peut changer la demi-configuration gauche. On va prendre la configuration

$$c = u0^{2k+2}w^T0d_0d_1 \dots$$

On va donc obtenir le même type de configuration que si on avait utilisé  $u0^n u$  pour initialiser. Or après  $k$  étapes de calcul, la bande «  $w$  » va contenir le mot  $w_{k+T} = w_k$ . Donc on retrouve le mot  $v$ , et les deux zones noires vont fusionner. On a maintenant obtenu une configuration infinie à droite qui construit un mur vertical noir. Sur la gauche, les conséquences du mot  $u$  protègent de tout. On a ainsi une contradiction avec l'hypothèse de départ : si on place le mot  $u$  à gauche de cette configuration infinie à droite, la zone bornée par la parabole formée par cet  $u$  ne peut se former complètement, car la parabole devrait dépasser le mur (fig. 28).

L'argument décisif, ici est la pente de la droite qui limite la zone noire, le résultat existe car c'est la vitesse maximale dans l'automate. Toute modification de cette pente ne permet pas de conserver le

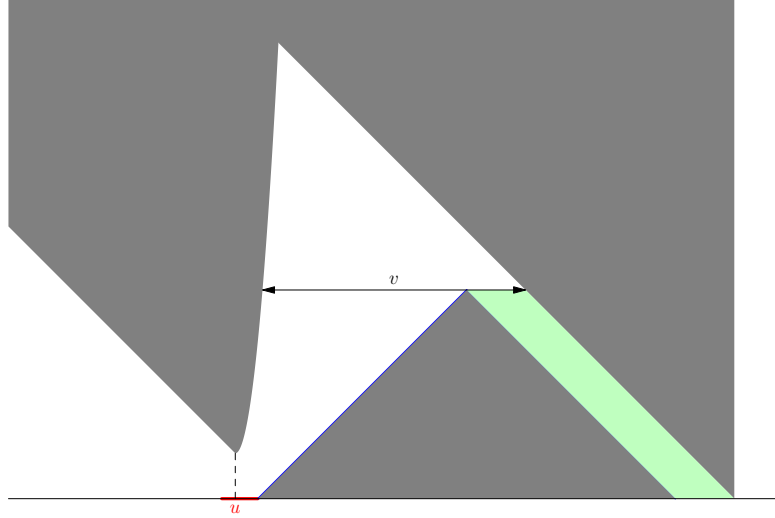


FIG. 27 – Construction d’une configuration infinie à droite appropriée.

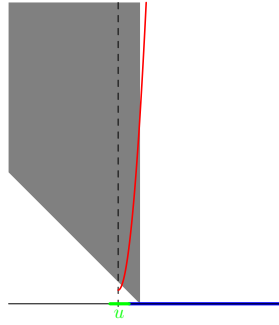


FIG. 28 – Mur vertical empêchant la construction de la parabole.

résultat. En revanche, on peut légèrement modifier la limite droite, en prenant une fonction convexe ayant une direction asymptotique, mais pas d’asymptote. Par le même procédé, on pourra construire une droite représentant la direction asymptotique, et conclure en disant que la courbe, même translatée, devrait traverser cette droite.

## 5.2 Cas des automates réversibles

Un automate cellulaire est dit réversible s’il est bijectif (toute configuration a un et un seul antécédent), et, grâce aux travaux de Hedlund [1], on peut montrer que s’il est bijectif, son inverse est encore un automate cellulaire. On s’intéresse aux automates réversibles, car ils empêchent la plupart des techniques que l’on utilisait précédemment, en particulier pour construire des compteurs, on avait besoin d’un état qui n’était obtenu par aucune règle de transition, c’est désormais impossible. On va aussi montrer qu’un état noir occupant une zone de largeur tendant vers l’infini est impossible. On a en fait le résultat :

**Théoreme** Soit  $u \in Q^k$  un mot fini de longueur  $k$ , si  $u \neq q^k$ ,  $q \in Q$ , alors  $\mathcal{C}_u$  ne contient aucun segment horizontal monochrome de longueur  $k$ .

Si tel était le cas, si la configuration initiale  $c$  contiendrait  $u$ ,  $\exists(i, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \exists q \in Q$ , tel que  $\forall j \leq k, c_{i+j}(t) = q$  et  $(i + j, t) \in \mathcal{C}_u$ . En prenant alors la configuration périodique de période  $u$  comme configuration initiale  $d$ , on obtient la configuration  $d(t)$  monochrome :  $\forall j \in \mathbb{Z}, d_j(t) = q$ . Or une telle configuration n’a que des images monochromes, et comme l’automate est réversible, elle n’a que des antécédents monochromes. Donc si  $u$  n’est pas monochrome, c’est impossible.

## Conclusion

On a donc montré qu'un grand nombre d'ensembles du demi-plan, constructibles par automate cellulaire, peuvent être des conséquences d'un mot fini. On sait aussi que certains ne peuvent pas l'être. Les questions ouvertes pour le moment concernent la caractérisation précise des ensembles ainsi réalisables. En particulier, on sait peu de choses sur des ensembles très peu denses et non connexes. Les conséquences constituées de plusieurs états différents ne sont pas entièrement connues non plus, et dans une bande de largeur constante, est-il possible de construire des ensembles non périodiques ?

Une motivation à ce travail est le parallèle qui existe avec des travaux sur la dynamique des automates cellulaires. En particulier, lorsqu'on les étudie comme fonctions sur  $Q^{\mathbb{Z}}$ , l'équicontinuité est liée à l'existence de « murs », c'est à dire de mots qui empêchent toute communication de la gauche vers la droite et réciproquement. Ces murs sont des conséquences de mots finis, et on peut être intéressés par leurs formes, leurs limites...

## Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de stage Victor Poupet, qui a su guider mes réflexions, l'ensemble de l'équipe ESCAPE pour l'ambiance de travail qu'ils créent, et en particulier Gaétan Richard pour l'idée des compteurs notamment.

## Références

- [1] G. Hedlund : Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical systems, *Mathematical Systems Theory* (1969)
- [2] M. Lothaire : Algebraic combinatorics on words, chapitre 3, *Cambridge university press* (2002)
- [3] J. von Neumann : Theory of self-reproducing automata, *University of Illinois Press* (1966)
- [4] S. Wolfram : Universality and complexity in cellular automata, *Physica D* (1984)
- [5] P. C. Fischer : Generation of primes by one-dimensional real-time iterative array, *Journal of the Assoc. Comput. Mach.*, 12 : 388–394 (1965)